Fiche n^0 5. Résolution numérique d'EDOs en langage C

Exercice 1 – **EDO du second ordre non-linéaire**
Etant donneés g, l'accélération due à la pesanteur et ℓ la longueur d'un fil, l'équation portant sur l'angle θ que fait avec la verticale un pendule suspendu à l'extrémité de ce fil s'écrit

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta).$$

On supposera qu'à l'instant initial le pendule est à la verticale ($\theta(0) = 0$) et qu'on lui a fourni une vitesse angulaire ω (et donc $\theta'(0) = \omega$).

a) Montrer qu'à tout instant t, on a l'égalité :

$$[\theta'(t)]^2 = \omega^2 - 2\frac{g}{\ell}[1 - \cos(\theta(t))].$$

b) En déduire que selon la valeur de ω, on assistera à deux régimes très différents, que vous préciserez et que vous expliquerez à l'aide d'un raisonnement physique simple.

c) Pour les petites oscillations ($\theta \ll 1$), comment peut on approcher le mouvement du pendule ?

d) On considère le schéma d'Euler explicite adapté de la fiche n^0 3 :

$$\frac{\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n}{\Delta t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta_n).$$

En utilisant vos connaissances sur ce schéma, quel risque fait il courir ?

e) Quels sont les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson pour cette équation ? Quel est l'inconvénient majeur de ces schémas (i.e. quelle est la difficulté rencontrée pour calculer θ_{n+2} connaissant θ_{n+1} et θ_n) ?

f) Montrer que si $\frac{g}{\ell}\Delta t^2 < 1$, alors l'application qui à θ associe $2\theta_{n+1} - \theta_n - \frac{g}{\ell}\Delta t^2 \sin(\theta)$ est contractante sur $\mathbb{R}$ et déduisez en

- *qu'à chaque itération temporelle, il existe une solution unique à l'équation non-linéaire liée au schéma d'Euler implicite,*
- *une façon de résoudre celle-ci par une méthode itérative.*

g) Quelle analyse menez vous pour le schéma de Crank-Nicolson ?

---

a) On multiplie l'égalité $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)$ par θ'. Cela donne

$$\theta''\theta' = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)\theta'.$$

On remarque d'une part que $\theta''\theta' = \frac{1}{2}[(\theta')^2]'$ et d'autre part que $-\sin(\theta)\theta'$ est la dérivée de $\cos(\theta)$. En intégrant entre 0 et t cette égalité, on obtient

$$\frac{1}{2}\left[(\theta')^2(t) - (\theta')^2(0)\right] = \frac{g}{\ell}\left[\cos(\theta(t)) - \cos(\theta(0))\right].$$

En utilisant $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = \omega$, on obtient le résultat.

Cette égalité est appelée en physique 'intégrale première du mouvement'.

b) Voyons comment le mouvement se déroule : on débute avec une vitesse angulaire égale à ω, le pendule s'élève, donc $\theta(t)$ augmente, le membre de droite de l'égalité diminue et donc θ' aussi. La question est : le membre de droite va-t-il s'annuler ou non ? Si la réponse est non, cela veut dire que θ' ne s'annule pas, et reste donc du même signe qu'à l'instant initial, c'est-à-dire positif : le pendule tourne toujours dans le même sens, il "fait des tours". Si le membre de droite au contraire s'annule, cela veut dire que la vitesse angulaire s'annule, le pendule ne peut plus aller plus haut, θ atteint un maximum. Sauf cas particulier où ce maximum est atteint juste à la verticale, le pendule va donc devoir redescendre sous l'effet de la gravité, θ' change de signe, le pendule repasse par sa position initiale mais avec une vitesse angulaire de signe contraire ; par symétrie, le même mouvement va avoir lieu de l'autre côté, il va donc effectuer des oscillations autour de sa position initiale. Ce sont donc les deux régimes physiques qui peuvent être obtenus : prenez un pendule donnez lui une 'petite' impulsion, et vous obtiendrez des oscillations ; donnez lui au contraire une 'forte' impulsion et vous le verrez effectuer des rotations complètes (hors amortissement du aux frottements).

Maintenant la question est 'sous quelle condition le membre de droite peut il s'annuler ?' Comme cos est toujours supérieur à -1, la valeur minimale du membre de droite est $\omega^2 - 4\frac{g}{\ell}$. Donc le membre de droite ne va pas s'annuler si $\omega > 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Le pendule va donc 'faire des tours' sous cette condition. Au contraire, si $\omega < 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ le membre de droite va s'annuler lorsque θ aura atteint la valeur de $[0, \pi]$ telle que $\cos(\theta) = 1 - \frac{\omega^2 \ell}{2g}$.

NB : le cas limite $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ correspond à la situation (tout à fait théorique) dans laquelle le pendule stoppe sa course tout en haut de sa trajectoire, à la verticale. Or on sait que ceci est un équilibre instable, cette situation particulière n'est donc pas très bien décrite par ce modèle.

c) Pour de petites oscillations, on a $\sin(\theta) \sim \theta$. On est donc dans le cas de la fiche du TP3, (équation linéaire du second ordre à coefficients constants) avec une pulsation angulaire égale à $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

d) Le schéma d'Euler explicite pour le cas linéaire (TP3) est instable. Le risque est que si on l'utilise pour le cas des petites oscillations, il y ait une amplification progressive du mouvement à cause de cette instabilité, qui fasse passer à l'autre régime physique (tours complets), ce qui est bien sûr absurde du point de vus physique.

e) Pour le schéma d'Euler implicite, en posant $z = \theta'$, on a $z' = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)$, on a

$$\theta_{n+1} - \theta_n = z_{n+1}\Delta t$$

et

$$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = z_{n+2}\Delta t.$$

Par différence entre ces deux égalités, et en utilisant

$$z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{g\Delta t}{\ell}\sin(\theta_{n+2}),$$

on obtient pour Euler implicite

$$\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n = -\frac{g\Delta t^2}{\ell}\sin(\theta_{n+2}).$$

Pour Crank-Nicolson, on obtient de la même façon

$$\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n = -\frac{g\Delta t^2}{4\ell}\left[\sin(\theta_{n+2}) + 2\sin(\theta_{n+1}) + \sin(\theta_n)\right].$$

Ces schémas sont implicites et non-linéaires ; on ne peut donc pas obtenir une expression simple donnant θ_{n+2} en fonction de θ_{n+1} et de θ_n. Il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps (celle qui définit θ_{n+2} en fonction de θ_{n+1} et de θ_n).

f) Cette application que nous nommons F a pour dérivée $F'(\theta) = -\frac{g}{\ell}\Delta t^2\cos(\theta)$, dont le module est strictement inférieur à 1 lorsque $\frac{g}{\ell}\Delta t^2 < 1$. Cette fonction est donc strictement contractante sur $\mathbb{R}$ sous cette condition. À chaque pas de temps, θ_{n+2} est solution de l'équation de point fixe $\theta_{n+2} = F(\theta_{n+2})$, et donc, F étant strictement contractante sur $\mathbb{R}$, il existe une unique solution à cette équation, qui permet donc de déterminer une unique valeur de θ_{n+2} en fonction de θ_{n+1} et de θ_n. On sait que la suite itérative suivante : $y^{(0)}$ quelconque et $y^{(k+1)} = F(y^{(k)})$ pour $k \geq 0$ converge vers cette unique solution, ce qui fournit un moyen pratique pour calculer une bonne approximation de cette solution. Dans la pratique on cherchera à choisir $y^{(0)}$ "proche" de la solution attendue ; quand Δt est "petit", celle-ci ne devrait pas être trop éloignée de θ_{n+1}. On peut donc raisonnablement choisir $y^{(0)} = \theta_{n+1}$.

g) Concernant le schéma de Crank-Nicolson, θ_{n+2} est solution de l'équation $\theta_{n+2} = G(\theta_{n+2})$ avec

$$G(\theta) = 2\theta_{n+1} - \theta_n - \frac{g\Delta t^2}{4\ell}\left[\sin(\theta) + 2\sin(\theta_{n+1}) + \sin(\theta_n)\right].$$

La fonction G étant strictement contractante sous la condition $\frac{g\Delta t^2}{4\ell} < 1$, la même analyse que ci-dessus peut être menée.

Exercice 2 – **Implémentation en Langage C**
Écrire une procédure qui résout de façon approchée, par une méthode itérative (point-fixe ou Newton), l'équation non-linéaire liée à la méthode de Crank-Nicolson. Même chose pour celle liée à la méthode d'Euler implicite.

Réutiliser les programmes des fiches précédentes pour construire un programme qui lit dans un fichier les données du problème (ω, le temps final de la simulation, la valeur de $\frac{g}{l}$, et le nombre de pas de temps souhaité) puis qui appelle des procédures implémentant les méthodes d'Euler explicite, implicite et la méthode de Crank-Nicolson.

Comment prendre en compte la contrainte sur le pas de temps qui assure l'unicité de la solution des équations non-linéaires à résoudre ?

À la fin du main on écrira dans un fichier les valeurs suivantes (une ligne par pas de temps) :

```
temps écoulé, valeur estimée par Euler explicite,
valeur estimée par Euler implicite, valeur estimée par Crank-Nicolson
```

et on visualisera les courbes grâce à `gnuplot`*. On se placera dans chacun des deux régimes mentionnés à la question b) de l'exercice précédent.*