1.

NdT 28/07/20

$\boxed{\text{L'algèbre de Lie } sl_n(\mathbb{k})}$

- $\mathbb{k}$ corps comm. ($\mathrm{car}(\mathbb{k}) = 0$ et $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$), $n \in \mathbb{N}^*$, $gl_n(\mathbb{k}) = M_n(\mathbb{k})$
$sl_n(\mathbb{k}) = \{ A \in gl_n(\mathbb{k}) \mid tr(A) = 0 \}$

- $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, e_{ij} matrice élémentaire habituelle

Rappel : $\forall\, 1 \leq i, j, k, l \leq n$, on a

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}$$

- On pose $\delta = diag_n(\mathbb{k}) \subseteq gl_n(\mathbb{k})$
et $\mathfrak{h} = \delta \cap sl_n(\mathbb{k})$
Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $h_i = e_{ii}$
$(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de δ et $(h_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sa duale

- On a $\mathfrak{h} \xrightarrow{\subseteq} \delta$ et $\delta^* \xrightarrow{{}^t\subseteq} \mathfrak{h}^*$

$$\lambda \longmapsto \lambda \circ \subseteq$$
$$h_i^* \longmapsto \varphi_i \ (\text{déf.})$$

- $\mathfrak{h} = \mathrm{Vect}\{ h_i - h_{i+1},\ 1 \leq i < n \}$.

$$sl_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{k} e_{ij} \right)$$

Obs. 1 : $\forall$ i, j, k, l

$$[h_i - h_j , e_{kl}] = (h_k^* - h_l^*)(h_i - h_j)\, e_{kl}$$
$$= (\varphi_k - \varphi_l)(h_i - h_j)\, e_{kl}$$

En fait, les $\varphi_k - \varphi_l$, $1 \leq k \neq l \leq n$ sont 2-à-2 distinctes (facile) et on pose

$$\Phi = \{ \varphi_k - \varphi_l , \ 1 \leq k \neq l \leq n \}$$

On a donc, en posant $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{k})$

1) $\mathbb{k}\, e_{k,l} \subseteq \mathfrak{g}_{\varphi_k - \varphi_l}$ $\quad 1 \leq k \neq l \leq n$

2) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$

3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

Obs. 2 $\forall$ $1 \leq k < l \leq n$,

$$\begin{aligned} sl_2(\mathbb{k}) &\longrightarrow \mathbb{k}\, e_{kl} \oplus \mathbb{k}(h_k - h_l) \oplus \mathbb{k}\, e_{lk} \\ x &\longmapsto e_{kl} \\ y &\longmapsto e_{lk} \\ h &\longmapsto h_k - h_l \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

<u>1ère conséquence</u> : $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Pour montrer cela, on va mq si i est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, alors $i = (0)$.

Soit i un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. On a :

$$i \supseteq i \cap \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \cap i \right).$$

Supposons que l'inclusion est stricte. Cela signifie qu'il existe dans i un élément dont les composantes de la décomp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$ ne sont pas toutes dans i.

Parmi les éléments de i dont les composantes ne sont pas toutes dans i, choisissons x avec un nombre minimal de composantes non nulles.

Alors $x = \sum_{\alpha \in \Phi \sqcup \{0\}} x_\alpha$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$.

Mais, $x \neq 0$, donc $\exists \beta \in \Phi \sqcup \{0\}$ tq $x_\beta \neq 0$.

Donc

$$\forall h \in \mathfrak{h}, \quad \underset{\substack{(1) \\ i}}{[h,x] - \beta(h)\, x} = \sum_{\alpha \neq \beta} \big(\alpha(h) - \beta(h)\big)\, x_\alpha$$

L'hypoth. sur x assure donc que :

$$\forall \alpha \neq \beta, \forall h \in \mathfrak{h}, \ \left(\alpha(h) - \beta(h)\right) x_\alpha \in \mathfrak{i}$$

et donc, $x_\alpha \in \mathfrak{i}$.
Il s'ensuit que $x_\beta \in \mathfrak{i}$. Contradiction !

<u>Bilan</u> : $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_\alpha \right)$.

Soit maintenant $1 \leq k \neq l \leq n$. Les obs. (1) et (2) montrent que $\mathbb{k} e_{kl} \oplus \mathbb{k}(h_k - h_l) \oplus \mathbb{k} e_{lk}$ est une ss alg. de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$. Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ est simple, l'intersection de $\mathfrak{i}$ avec cette sous-algèbre est (0).
Il s'ensuit que $\boxed{\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}}$.

Enfin, pour $x \in \mathfrak{i}$, pour $1 \leq k \neq l \leq n$,

$$\mathfrak{i} \ni [x, e_{kl}] = (\varphi_k - \varphi_l)(x)\, e_{kl}$$

Donc $(\varphi_k - \varphi_l)(x) = 0$

Comme les $\varphi_k - \varphi_l$ engendrent $\mathfrak{h}^*$, on obtient $x = 0$.

Concl. : $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

2e Conséquence : La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

permet de montrer facilement que $\mathfrak{h}$ est torale et que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Si de plus $\mathfrak{k}$ est une s-alg torale tq $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}$, comme $\mathfrak{k}$ est abélienne, $\mathfrak{k}$ normalise $\mathfrak{h}$.

Concl. : $\mathfrak{h}$ est torale maximale.