1/ NdT 25/07/20

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{k})$

$\mathbb{k}$ de caract. 0, $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$.

$\ell \in \mathbb{N}^*$

Soit V un $\mathbb{k}$-ev de dim 2ℓ et de base $\mathcal{E} : (e_1, \dots, e_{2\ell})$

On considère la forme bilinéaire

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(b) = \left(\begin{array}{c|c} & I_\ell \\ \hline -I_\ell & \end{array}\right).$$ Autrement dit,

$$\forall\ 1 \leq i \leq \ell \qquad b(e_i, e_{i+\ell}) = 1$$
$$b(e_{i+\ell}, e_i) = -1.$$
$$\forall\ 1 \leq i, j \leq 2\ell \qquad b(e_i, e_j) = 0$$
$$j \neq i \pm \ell$$

Il est immédiat que b est antisymétrique et non dégénérée.

On pose alors

$$\mathfrak{sp}(V, b) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \,/\, b(f(v), w) + b(v, f(w)) = 0,\ \forall v, w \in V \}$$

Un calcul immédiat mq $\mathfrak{sp}(V, b)$ est une ss alg de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$

Considérons l'iso.
$$\mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{k}).$$
$$f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$$

Il est clair que l'image de $\mathfrak{sp}(V, b)$ par cet iso. est l'ensemble des matrices A de $\mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{k})$ tq

$$\boxed{{}^tAB + BA = 0}$$

L'image de $\mathfrak{sp}(V,b)$ par l'iso. ci-avant est donc

$$\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{k}) = \{ A \in \mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{k}) / {}^tAB + B\,{}^tA = 0 \}$$
$$\subseteq \mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{k}).$$

Si A ds $\mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{k})$ et écrivons A en bloc

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{array} \right) \quad \text{où} \quad A_i \in \mathrm{M}_\ell(\mathbb{k}).$$

Alors, $A \in \mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{k})$ ssi : $\begin{cases} {}^tA_1 = -A_4 \\ {}^tA_2 = A_2 \\ {}^tA_3 = A_3 \end{cases}$

En particulier, $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{k}) \subseteq \mathfrak{sl}_{2\ell}(\mathbb{k})$

et donc $\boxed{\mathfrak{sp}(V, b) \subseteq \mathfrak{sl}(V)}$

On déduit aussi de ce qui précède que $\dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{sp}(V,b)) = 2\ell^2 + \ell$.

Base de $Sp(V, b)$.

Il est clair que les éléments suivants forment une base de $Sp_{2l}(\mathbb{K})$

- $X_{ij} = E_{i,j} - E_{j+l,i+l}$, $1 \leq i, j \leq l$

  (Cette famille est une base de l'ens. des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & -{}^tA_1 \end{array}\right)$.)

- $U_i = E_{i,i+l}$, $1 \leq i \leq l$

  $Y_{ij} = E_{i,j+l} + E_{j,i+l}$ $1 \leq i < j \leq l$

  (Cette famille est une base de l'ens. des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, ${}^tA_2 = A_2$.)

- $V_i = E_{i+l,i}$, $1 \leq i \leq l$

  $Z_{ij} = E_{i+l,j} + E_{j+l,i}$, $1 \leq i < j \leq l$

On note $\mathfrak{h}$ l'ens. des matrices de $Sp_{2l}(\mathbb{K})$ qui sont diagonales. Ainsi

$$\mathfrak{h} = \mathrm{Vect}\{ E_{ii} - E_{i+l,i+l} , 1 \leq i \leq l \}.$$

Étude de $\mathfrak{h}$: Il est clair que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V, b)$.

On décrit maintenant l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V, b)$.

Pour $1 \leq i \leq \ell$, on pose $H_i = E_{ii} - E_{i+\ell, i+\ell}$.

(1)

On rappelle la formule : $[E_{ij}, E_{k\ell}] = \delta_{jk} E_{i\ell} - \delta_{\ell i} E_{kj}$

Pour $1 \leq i \neq j \leq \ell$

Calcul (1) $[H_k, X_{ij}] = \begin{cases} X_{ij} & \text{si } k = i \\ -X_{ij} & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ie Pour $1 \leq i \neq j \leq \ell$, $[H_k, X_{ij}] = (H_i^* - H_j^*)(H_k) X_{ij}$

ie $\boxed{X_{ij} \in \mathfrak{g}_{H_i^* - H_j^*}}$

---

(1) Donc $\{H_i, 1 \leq i \leq \ell\}$ est une base de $\mathfrak{h}$; on note $\{H_i^*, 1 \leq i \leq \ell\}$ sa duale.

On montre aussi que

Calcul ② pour $1 \leq i < j \leq \ell$

$Y_{i,j} \in \mathcal{G}_{H_i^* + H_j^*}$ ✓ cf. calcul

$Z_{ij} \in \mathcal{G}_{-H_i^* - H_j^*}$ ✓ cf. transposition de ci-dessus car ${}^tY_{ij} = Z_{ij}$ pr $1 \leq i \neq j \leq \ell$

Calcul ③ pour $1 \leq i \leq \ell$

$U_i \in \mathcal{G}_{2H_i^*}$ ✓

$V_i \in \mathcal{G}_{-2H_i^*}$ ✓

Donc, si l'on pose $\Phi = \{\pm H_i^* \pm H_j^*,\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$

$\sqcup \{\pm 2H_i^*,\ 1 \leq i \leq \ell\}$

on a (*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

On conclut, comme ds le cas de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ que $\mathfrak{g}$ est semi simple et $\mathfrak{h}$ torale maximale.