NdT 28/07/20

# L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$

- $\mathbb{k}$ corps comm. $\underbrace{}_{car(\mathbb{k})=0 \text{ et } \mathbb{k}=\overline{\mathbb{k}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) = M_n(\mathbb{k})$
  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) = \{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \ / \ tr(A) = 0 \}$
- $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $e_{ij}$ matrice élémentaire habituelle

Rappel : $\forall\ 1 \leq i,j,k,l \leq n$, on a

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}\, e_{il} - \delta_{li}\, e_{kj}$$

- On pose $\delta = \mathrm{diag}_n(\mathbb{k}) \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$
  et $\mathfrak{h} = \delta \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$
  Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $h_i = e_{ii}$
  $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de $\delta$ et $(h_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sa duale
- On $\tilde{c}$ $\mathfrak{h} \xrightarrow{\subseteq} \delta$ et $\delta^* \xrightarrow{{}^t\subseteq} \mathfrak{h}^*$

$$\begin{aligned} \lambda &\longmapsto \lambda \circ \subseteq \\ h_i^* &\longmapsto \varphi_i \ (\text{déf.}) \end{aligned}$$

- $\mathfrak{h} = \mathrm{Vect}\{ h_i - h_{i+1},\ 1 \leq i < n \}$.

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{k}\, e_{ij} \right)$$

Obs. 1 : $\forall\ i, j, k, l$

$$[h_i - h_j, e_{kl}] = (h_k^* - h_l^*)(h_i - h_j)\, e_{kl}$$
$$= (\varphi_k - \varphi_l)(h_i - h_j)\, e_{kl}$$

En fait, les $\varphi_k - \varphi_l$, $1 \leq k \neq l \leq n$ sont 2-à-2 distinctes (facile) et on pose

$$\Phi = \{\varphi_k - \varphi_l,\ 1 \leq k \neq l \leq n\}$$

On a donc, en posant $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{k})$

1) $\mathbb{k}\, e_{k,l} \subseteq \mathfrak{g}_{\varphi_k - \varphi_l}$ $\quad 1 \leq k \neq l \leq n$

2) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$

3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

Obs. 2 $\forall\ 1 \leq k < l \leq n$,

$$\begin{aligned} sl_2(\mathbb{k}) &\longrightarrow \mathbb{k}\, e_{kl} \oplus \mathbb{k}(h_k - h_l) \oplus \mathbb{k}\, e_{lk} \\ x &\longmapsto e_{kl} \\ y &\longmapsto e_{lk} \\ h &\longmapsto h_k - h_l \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

<u>$1^{ère}$ conséquence</u> : $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Pour montrer cela, on va mq si $i$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, alors $i = (0)$.

Soit $i$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. On a :

$$i \supseteq i \cap \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \cap i \right).$$

Supposons que l'inclusion est stricte. Cela signifie qu'il existe dans $i$ un élément dont les composantes de la décomp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$ ne sont pas toutes dans $i$.

Parmi les éléments de $i$ dont les composantes ne sont pas toutes dans $i$, choisissons $x$ avec un nombre minimal de composantes non nulles.

Alors $x = \sum_{\alpha \in \Phi \sqcup \{0\}} x_\alpha$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$.

Mais, $x \neq 0$, donc $\exists \beta \in \Phi \sqcup \{0\}$ tq $x_\beta \neq 0$.

Donc

$$\forall h \in \mathfrak{h}, \quad \underset{\in\, i}{[h,x]} - \beta(h)x = \sum_{\alpha \neq \beta} \big(\alpha(h) - \beta(h)\big) x_\alpha$$

L'hypoth. sur $x$ assure donc que :

$$\forall \alpha \neq \beta, \forall h \in \mathfrak{h}, \quad \big(\alpha(h) - \beta(h)\big) x_\alpha \in \mathfrak{i}$$

et donc, $x_\alpha \in \mathfrak{i}$.
Il s'ensuit que $x_\beta \in \mathfrak{i}$. Contradiction !

<u>Bilan</u> : $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_\alpha \right)$.

Soit maintenant $1 \leq k \neq l \leq n$. Les obs. ① et ② montrent que $\mathbb{k} e_{kl} \oplus \mathbb{k}(h_k - h_l) \oplus \mathbb{k} e_{lk}$ est une ss alg. de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$.
Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ est simple, l'intersection de $\mathfrak{i}$ avec cette sous-algèbre est $(0)$.
Il s'ensuit que $\boxed{\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}}$.

Enfin, pour $x \in \mathfrak{i}$, pour $1 \leq k \neq l \leq n$,

$$\mathfrak{i} \ni [x, e_{kl}] = (\varphi_k - \varphi_l)(x)\, e_{kl}$$

Donc $(\varphi_k - \varphi_l)(x) = 0$

Comme les $\varphi_k - \varphi_l$ engendrent $\mathfrak{h}^*$, on obtient $x = 0$.

Concl. : $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

2ᵉ Conséquence : La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

permet de montrer facilement que $\mathfrak{h}$ est torale et que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Si de plus $\mathfrak{k}$ est une ss alg torale tq $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}$, comme $\mathfrak{k}$ est abélienne, $\mathfrak{k}$ normalise $\mathfrak{h}$.

Concl : $\mathfrak{h}$ est torale maximale.

Calcul de la forme de Killing (à la main).

Obs. 3 Soient $1 \leq i \neq j \leq n$
$1 \leq k \neq l \leq n$
$1 \leq a \neq b \leq n$

$$[h_i - h_j, [h_k - h_l, e_{ab}]]$$
$$= (\varphi_a - \varphi_b)(h_k - h_l)(\varphi_a - \varphi_b)(h_i - h_j)\, e_{ab}$$

En particulier

$$\kappa(h_i - h_j, h_k - h_l) = \sum_{1 \leq a \neq b \leq n} (\varphi_a - \varphi_b)(h_k - h_l)(\varphi_a - \varphi_b)(h_i - h_j)$$
$$= 2 \sum_{1 \leq a < b \leq n} (\varphi_a - \varphi_b)(h_k - h_l)(\varphi_a - \varphi_b)(h_i - h_j)$$

Donc pour $1 \leq i \leq k < n$,

$$\kappa\left(h_i - h_{i+1}, h_k - h_{k+1}\right)$$

$$= 2 \sum_{1 \leq a < b \leq n} (\varphi_a - \varphi_b)(h_i - h_{i+1})(\varphi_a - \varphi_b)(h_k - h_{k+1})$$

En examinant la position relative des couples $(a, b)$, $(i, i+1)$, $(k, k+1)$ on obtient que :

1er cas $i = k$ $\quad \dots = 4n$ ✓

2e cas $i+1 = k$ $\quad \dots = -2n$ ✓

3e cas sinon $\quad \dots = 0$ ✓

i.e. : $$\operatorname{Mat}_{(h_i - h_{i+1})_{1 \leq i < n}}(\kappa) = 2n \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Le système de racine

On a $\iota : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$

$h \longmapsto \kappa(h, -)$

Pour $1 \leq i < n$

**Obs 4** : $\kappa\left(\frac{1}{2n}(h_i - h_{i+1}), -\right) = \varphi_i - \varphi_{i+1}$ ✓

et donc

pour $1 \leq i \neq j \leq n$, $\kappa\left(\frac{1}{2n}(h_i - h_j), -\right) = \varphi_i - \varphi_j$

Autrement dit, pour $1 \leq i \neq j \leq n$,

$$t_{\varphi_i - \varphi_j} = \frac{1}{2n}\left(h_i - h_j\right)$$

puis $h_{\varphi_i - \varphi_j} = h_i - h_j$

(à ce stade, il faut calculer $\kappa(h_i - h_j, h_i - h_j)$ on constate facilement qu'il vaut $4n$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$).

La forme bilin. sym. dont hérite $\mathfrak{h}^*$ est donc donnée par :

$$\left( \varphi_i - \varphi_{i+1} , \varphi_k - \varphi_{k+1} \right)$$

$$= \kappa \left( t_{\varphi_i - \varphi_{i+1}} , t_{\varphi_k - \varphi_{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4n} \kappa \left( h_i - h_{i+1} , h_k - h_{k+1} \right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ -1/2 & \text{si } i+1 = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la matrice de Cartan associée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Descript° de $E_{\mathbb{R}}$ :

$$E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\varphi_i - \varphi_{i+1},\ 1 \leq i < n)$$

est un $\mathbb{R}$-ev. euclidien de base $\varphi_i - \varphi_{i+1}$, $1 \leq i < n$, (en identifiant $\varphi_i - \varphi_{i+1}$ et son image ds $E_{\mathbb{R}}$) et dont le p.s. est donné par :

$$(\varphi_i - \varphi_{i+1}, \varphi_k - \varphi_{k+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ -1/2 & \text{si } i+1 = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

St alors $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-ev euclidien standard et $E = (\mathbb{R}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n))^{\perp}$ son hyperplan orthog. à la droite $\mathbb{R}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$. (Les $\varepsilon_i$ st les vect. de la b.c. de $\mathbb{R}^n$.) Alors, on a un iso. de $\mathbb{R}$-ev. (qui n'est pas une isométrie)

$$E_{\mathbb{R}} \longrightarrow E$$

$$\varphi_i - \varphi_{i+1} \longmapsto \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$

Il est clair que c'est un iso. de syst. de racines entre $(E_{\mathbb{R}}, \Phi)$ et le syst. de racine de type $A_{n-1}$.