Université Sorbonne Paris Nord
15 décembre 2020

Algèbres de Lie I
L. Rigal

Examen

La note finale tiendra compte du soin et de la précision apportés à la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée par une référence au cours.

* * *

Cours. On note $\Bbbk$ un corps commutatif.
1. Rappeler la définition d'*algèbre de Lie* sur $\Bbbk$.
2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\Bbbk$. Rappeler la définition de *représentation* de $\mathfrak{g}$.
3. Rappeler la définition d'algèbre de Lie *nilpotente* sur $\Bbbk$.
4. Rappeler l'énoncé du Théorème de Engel.

Exercice. Le but de cet exercice est de mettre en évidence une condition suffisante sous laquelle une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, de dimension finie, est semi-simple. Dans toute la suite, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on fixe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie et non nulle ainsi qu'une sous-algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [h,x] = \lambda(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. On rappelle qu'alors les sous-espaces $\mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, sont en somme directe. On suppose en outre que les hypothèses suivantes sont satisfaites.
H1. Il existe un sous-ensemble Φ de $\mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right). \tag{1}$$

H2. Pour tout $\alpha \in \Phi$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$.
H3. Pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que, en posant $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ et $S_\alpha = \mathrm{Vect}\{y_\alpha, h_\alpha, x_\alpha\}$, S_α soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, isomorphe comme algèbre de Lie à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ via l'application linéaire $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow S_\alpha$, $x \mapsto x_\alpha$, $y \mapsto y_\alpha$, $h \mapsto h_\alpha$.
H4. L'ensemble Φ engendre $\mathfrak{h}^*$.
1. Quelques observations. Démontrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, que $\Phi \neq \emptyset$ et que $\mathfrak{h} \neq (0)$.
2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On considère un idéal abélien $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$.
2.1. Montrer que l'on a

$$\mathfrak{i} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}) \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{i} \right).$$

Indication : on pourra supposer qu'il existe un élément de $\mathfrak{i}$ dont les composantes dans la décomposition (1) ne sont pas toutes dans $\mathfrak{i}$; considérer parmi les tels éléments un élément dont le nombre de composantes non nulles est minimal et obtenir une contradiction.
2.2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \Phi$, $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_\alpha = (0)$. En déduire que $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$.
Indication : on pourra considérer $\mathfrak{i} \cap S_\alpha$ et utiliser la simplicité de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
2.3. Montrer que $\mathfrak{i} = 0$ et conclure que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.
Indication : On pourra utiliser l'hypothèse H4.
3. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est torale maximale.
3.1. Démontrer, à l'aide de (1), que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre torale de $\mathfrak{g}$.
3.2. Démontrer, à l'aide de (1), que le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{h}$.
3.3. Utiliser le fait que les sous-algèbres torales sont abéliennes pour en déduire que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre torale maximale de $\mathfrak{g}$.
4. Un exemple d'application. Montrer que $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple dont le sous-espace des matrices diagonales est une sous-algèbre torale maximale.

Problème. Dans tout le problème, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Définition – *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{C}$ *et* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *son radical. Une sous-algèbre de Lévi de* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$ *(somme directe d'espaces vectoriels).*

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (de Lévi) – *Toute algèbre de Lie sur* $\mathbb{C}$*, de dimension finie, admet une sous-algèbre de Lévi.*

Dans toute la suite, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, de dimension finie. On note $Z(\mathfrak{g})$ son centre et $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ son radical.

1. Questions préliminaires.
1.1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de Lie de $\mathfrak{g}$ tel que $(0) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ et soit $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ la projection canonique. Montrer que, dans la correspondance bijective entre idéaux de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ et idéaux de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$, la propriété "être résoluble" est conservée. Montre que $\pi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$.
1.2. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{h}$ est semi-simple.
1.3. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Montrer que si $\mathfrak{h}$ est semi-simple et si $\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{g}$.
1.4. Soit $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que si $\tau(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = 0$, toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire. (On pourra considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.)

2. Etude d'un cas particulier. On suppose dans cette question qu'il n'existe pas d'idéal de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $(0) \subset \mathfrak{a} \subset \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ (inclusions strictes).
2.1. Montrer que l'on a $Z(\mathfrak{g}) = (0)$ ou $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.
2.2. On suppose dans cette question que $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.
(a) On considère la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Montrer que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ est une sous-représentation $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}})$ et qu'il existe une sous-représentation $\mathfrak{h}$ de $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}})$ telle que $\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. (Voir 1.4.)
(b) Montrer que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Le Théorème de Lévi est donc démontré sous les hypothèses de la question 2.2.
(c) Montrer que l'on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$. (Dans le cas particulier en présence, il existe une unique sous-algèbre de Lévi.)
2.3. On suppose dans cette question que $Z(\mathfrak{g}) = (0)$ et que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \neq (0)$. On considère le morphisme d'algèbres de Lie:

$$\sigma \;:\; \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})).$$

Pour $x \in \mathfrak{g}$, $\sigma(x)$ est donc l'endomorphisme de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ qui envoie $u \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ sur $[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x), u]$. On considère par ailleurs les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$:

$$M = \left\{ u \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \,|\, u(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad u_{|\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} \in \mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} \right\};$$

$$N = \left\{ u \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \,|\, u(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad u_{|\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} = 0 \right\};$$

$$P = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})).$$

En outre, si $u \in M$, on note $\lambda(u)$ l'unique nombre complexe tel que $u_{|\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} = \lambda(u)\mathrm{id}_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})}$.
(a) Montrer que l'hypothèse de la question 2 assure que $[\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})] = 0$. En déduire que l'on a $P \subseteq N \subseteq M$. On observera, sans le démontrer, que N est de codimension 1 dans M.

(b) Montrer que, pour $x, y \in \mathfrak{g}$, $u \in M$: $(\sigma(x)(u))(y) = [x, u(y)] - u([x, y])$.
(c) Montrer que, pour $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, $u \in M$: $(\sigma(x)(u))(y) = 0$. En déduire que

$$\sigma(\mathfrak{g})(M) \subseteq N.$$

(d) Montrer que, pour $x \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, si $u = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(z)$: $(\sigma(x)(u)) \in P$. En déduire que

$$\sigma(\mathfrak{g})(P) \subseteq P.$$

(e) Montrer que, pour $x \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, $u \in M$: $\sigma(x)(u) = -\lambda(u)\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ (voir 2.3, (a)). En déduire que

$$\sigma(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))(M) \subseteq P.$$

(f) D'après ce qui précède, σ induit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M dont N et P sont des sous-représentations. On considère la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M/P induite, et l'on note $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M/P)$ son morphisme structurel. Par abus de langage, on note N/P l'image canonique de N dans M/P. Ainsi, N/P est une sous-représentation de $(M/P, \tau)$, de codimension 1. A l'aide de la question préliminaire 1.4, montrer qu'il existe une droite Δ de M/P supplémentaire de N/P qui soit une sous-représentation de M/P. Et, à l'aide de la question (c), montrer que l'action de $\mathfrak{g}$ sur Δ est triviale.
(g) Déduire de la question (f) qu'il existe un endomorphisme $v \in M \setminus N$ tel que $\sigma(\mathfrak{g})(v) \subseteq P$ et montrer que l'on peut choisir un tel v de sorte que $\lambda(v) = -1$.
(h) On considère le morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow P$, $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$. Montrer que les hypothèses de la question 2.3 assurent que φ est un isomorphisme.
(i) On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{ccccccc} \psi & : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \\ & & x & \mapsto & \sigma(x)(v) & \mapsto & \varphi^{-1}(\sigma(x)(v)) \end{array}.$$

Montrer que $\psi_{|\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} = \mathrm{id}_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})}$, que $\mathfrak{g} = \ker(\psi) \oplus \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ et que $\ker(\psi)$ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{g}$. Le Théorème de Lévi est donc démontré sous les hypothèses de la question 2.3.

Finalement, le Théorème de Lévi est démontré sous l'hypothèse de la question 2.

3. Démonstration du Théorème de Lévi.
On démontre maintenant le Théorème de Lévi dans le cas général, en procédant par récurrence sur $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$. Pour cela, on s'appuiera sur les résultats de la question 2.
3.1. Démontrer le Théorème de Lévi lorsque $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ vaut 0 ou 1.
3.2. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose que le Théorème de Lévi est vrai lorsque $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) \leq n$ et on suppose que la dimension du radical de $\mathfrak{g}$ est $n + 1$.
3.2.1. On suppose qu'il existe un idéal de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $(0) \subset \mathfrak{a} \subset \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ et on note $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ la projection canonique.
(a) Montrer qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$ telle que $\pi(\mathfrak{b})$ soit semi-simple et

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \pi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) \oplus \pi(\mathfrak{b}).$$

Montrer qu'en outre, $\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b}$.
(b) Montrer que $\mathfrak{a}$ est le radical de $\mathfrak{b}$ et qu'il existe une sous algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
(c) Montrer que $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{g}$.
3.2.2. Démontrer que $\mathfrak{g}$ admet une sous-algèbre de Lévi.

On a donc démontré le Théorème de Lévi.