NdT 29/07/20

Simplicité de $sl_n(\mathbb{k})$

① Le cas de $sl_2(\mathbb{k})$

On note e, h, f les gén. canoniques de $sl_2(\mathbb{k})$. Si $x = \alpha e + \beta h + \gamma f \in sl_2(\mathbb{k})$.
Alors $ad(e)^2(x) = ad(e)(-2\beta e + \gamma h) = -2\gamma e$
puis $ad(f)\, ad(e)^2(x) = 2\gamma h$
puis $ad(f)^2\, ad(e)^2(x) = 4\gamma f$.

On supp. $car(\mathbb{k}) \neq 2$.

Soit i un idéal non nul de $sl_2(\mathbb{k})$ et $x \in i$ non nul. On écrit x comme ci-dessus. Si $\gamma \neq 0$, alors ce qui précède mq $i = sl_2(\mathbb{k})$. La m̂ chose est vrai si $\alpha \neq 0$. Il reste donc à traiter le cas où $\alpha = \gamma = 0$. Alors $h \in i$ et il est clair que e et f aussi. Dans ts les cas, $i = sl_2(\mathbb{k})$. On a mq $sl_2(\mathbb{k})$ est simple.

Note : si $car(\mathbb{k}) = 2$, $sl_2(\mathbb{k})$ est nilpotente. La série centrale descendante est :

$$\underset{[\mathfrak{g}, \mathbb{k}h]}{\overset{\|}{(0)}} \subseteq \underset{\mathcal{D}(sl_2(\mathbb{k}))}{\overset{\|}{\mathbb{k}h}} \subseteq sl_2(\mathbb{k})$$

② Le cas général ([illegible])

Lemme ① (1) $\mathrm{ad}(e_{ij})^2(\mathfrak{h}) = 0$, $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$

(2)

$$\mathrm{ad}(e_{ij})^2(e_{kl}) = \begin{cases} -2e_{lk} & \text{si } j=k \text{ et } l=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \neq j \leq n$, $1 \leq k \neq l \leq n$.

Dém. : (1) $\mathrm{ad}(e_{ij})(\mathfrak{h}) \subseteq \Bbbk\, e_{ij}$ ✓

(2) $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}\, e_{il} - \delta_{li}\, e_{kj}$

$$[e_{ij}, [e_{ij}, e_{kl}]] = \delta_{jk}\, [e_{ij}, e_{il}] - \delta_{li}\, [e_{ij}, e_{kj}]$$

$$= \cancel{\delta_{jk}\delta_{ji}\, e_{il}} - \delta_{jk}\delta_{li}\, e_{ij}$$

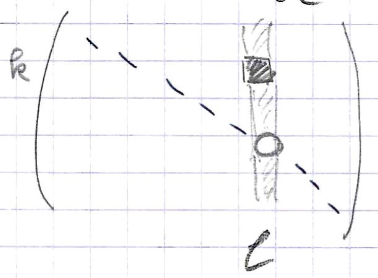
$$- \delta_{li}\delta_{jk}\, e_{ij} + \cancel{\delta_{li}\delta_{ji}\, e_{kj}}$$

$$= -2\,\delta_{jk}\,\delta_{li}\, e_{ij}$$ ✓

Lemme ② Soit $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. S'il existe $1 \leq k \neq l \leq n$ tq $e_{kl} \in \mathfrak{i}$, alors $\mathfrak{i} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$.

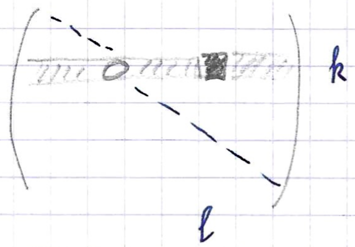
dém. 1) si $i \neq k$, $i \neq l$, $[e_{ik}, e_{kl}] = e_{il}$

Donc $e_{il} \in \mathfrak{i}$.

ie 

$\in \mathfrak{i}$

2) si $j \neq l$, $j \neq k$, $[e_{kl}, e_{lj}] = e_{kj} \in \mathfrak{i}$

ie 

3) Donc $e_{1l} \in \mathfrak{i}$ si $1 \neq l$ (en appliquant 1))

$e_{k1} \in \mathfrak{i}$ si $k \neq 1$ (" 2))

4) Donc, en appliquant 3), $e_{ij} \in \mathfrak{i}$ $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n$.

5) $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n$, $h_i - h_j = [e_{ij}, e_{ji}] \in \mathfrak{i}$. ■

Lemme ③ (Supp. car$(\mathbb{k}) \neq 2$) Soit $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$.
Si $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$, $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{h}$.

dém supp. $\mathfrak{i} \not\subset \mathfrak{h}$. Il existe $1 \leq k \neq l \leq n$ et $x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (h_i - h_{i+1}) + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} e_{ij}$ ds $\mathfrak{i}$ tq $\alpha_{kl} \neq 0$.

Avec le Lemme 1,

$$ad(e_{\ell k})^2(x) = -2\alpha_{k\ell}\, e_{\ell k}$$

Donc $e_{\ell k} \in i$.
Puis, avec le lemme 2, $i = sl_n(\mathbb{k})$.

car$(\mathbb{k}) \neq 2$ et car$(\mathbb{k}) \nmid n$

<u>Proposit°</u> Si i est un idéal de $sl_n(\mathbb{k})$ tq $i \neq sl_n(\mathbb{k})$, alors $i = 0$.

<u>Dém.</u> : D'après le lemme 3, $i \subseteq \mathfrak{h}$.
Si $x \in i$. On a $x = \sum_{1 \leq k < n} d_k (e_{kk} - e_{k+1,k+1})$ et, pour $1 \leq i < n$, $[e_{i,i+1}, x] \in i$.

Or : $[e_{12}, x] = (-2d_1 + d_2)\, e_{12}$ ✓

pour $1 < i < n-1$, $[e_{i,i+1}, x] = (d_{i-1} - 2d_i + d_{i+1})\, e_{i,i+1}$ ✓

$[e_{n-1,n}, x] = (-2d_{n-1} + d_{n-2})\, e_{n-1,n}$ ✓

Comme ces crochets st ds i, on a (cf. Lemme 2)

$$2d_1 - d_2 = 0$$

$$-d_{i-1} + 2d_i - d_{i+1} = 0 \quad \text{pr } 1 < i < n-1$$

$$-d_{n-2} + 2d_{n-1} = 0$$

ie

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice de gauche est inv., cf ci-dessous, on conclut que $x = 0$. Concl. : $i = 0$. ■

<u>Note</u> : 1) La méth. ci-dessus est tributaire de l'inversibilité de la matrice $(n-1)\times(n-1)$

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

⚠ en caract. 0 cette matrice est inv. mais en caract. positive, ce n'est pas tjs le cas

2) La méth. ci-dessus requiert $\mathrm{car}(k) \neq 2$ à cause de la dém. du Lemme 3

3) En caract. > 0 :

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \rightsquigarrow C_1 = (2)$ inv. ssi $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 2$

$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{k}) \rightsquigarrow C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ inv. ssi $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 3$

$\mathfrak{sl}_4(\mathbb{k}) \rightsquigarrow C_3$ de dét. 4 inv ssi $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 2$

$\mathfrak{sl}_5(\mathbb{k}) \rightsquigarrow C_4$ de dét. 5 inv. ssi $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 5$

Le résultat général est que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ est simple dès que $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ et $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \nmid n$

En effet, posons $c_n = \det(C_n)$. On vérifie facilement que $c_n - 2c_{n-1} + c_{n-2} = 0$. Donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire et on en déduit que, $\forall n \geq 1$, $c_n = n+1$.

Or, la dém. ci-dessus mq $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ est simple dès que $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ et $c_{n-1} = \det(C_{n-1})$ est non nul.