# Produit tensoriel d'espaces vectoriels.

19/03/2021

tensor-product-vect.tex

Dans toute cette note, $\Bbbk$ désigne un corps commutatif.

## 1 Produit tensoriel de deux espaces-vectoriels.

**Définition 1.1** – *Soient $U$, $V$ et $W$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Une application bilinéaire de $U \times V$ dans $W$ est une application $f : U \times V \longrightarrow W$ telle que, pour tous $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ et $\lambda \in \Bbbk$ :*
*(i) $f(u+u', v) = f(u,v) + f(u', v)$;*
*(ii) $f(u, v+v') = f(u,v) + f(u,v')$;*
*(iii) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v) = f(u, \lambda v)$.*

**Définition 1.2** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Un produit tensoriel de $U$ et $V$ est un couple $(T,t)$, où $T$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel et $t : U \times V \longrightarrow T$ une application bilinéaire telle que, pour tout $\Bbbk$-espace vectoriel $W$ et toute application bilinéaire $f : U \times V \longrightarrow W$, il existe un unique morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $\phi : T \longrightarrow W$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

*soit commutatif.*

Nous allons démontrer que, si $U$ et $V$ sont des $\Bbbk$-espaces vectoriels, il existe un produit tensoriel de $U$ et $V$ et que, à isomorphisme près, ce produit tensoriel est unique.

**Proposition 1.3** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Si $(T,t)$ et $(T',t')$ sont des produits tensoriels de $U$ et $V$, alors il existe un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels entre $T$ et $T'$.*

*Démonstration :* Par définition, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & T' \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & T' \arrow[d, "\phi'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

où $\phi$ et $\phi'$ sont des applications linéaires. Ces diagrammes donnent lieu à deux autres diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t"'] & T \arrow[d, "\phi' \circ \phi"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t'"'] & T' \arrow[d, "\phi \circ \phi'"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

Mais alors, l'unicité du morphisme requis par la définition du produit tensoriel mène à $\phi\circ\phi' = \mathrm{id}_{T'}$ et $\phi' \circ \phi = \mathrm{id}_T$. ■

On montre maintenant l'existence d'un produit tensoriel.

**Proposition 1.4** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Alors, il existe un produit tensoriel de $U$ et $V$.*

*Démonstration :* Notons $F$ l'ensemble des applications à support fini de $U\times V$ dans $\Bbbk$, muni de sa structure naturelle de $\Bbbk$-espace vectoriel. Pour tout $(u, v) \in U\times V$, notons $\delta_{(u,v)} \in F$ l'application qui vaut 1 sur $(u, v)$ et 0 sur tout autre élément de $U\times V$. Alors, la famille $(\delta_{(u,v)},\ (u, v) \in U\times V\}$ est une base de $F$ et on a une injection (ensembliste) $U \times V \longrightarrow F$, $(u, v) \mapsto \delta_{(u,v)}$. Dans la suite, on commettra l'abus de langage qui consiste à identifier un élément $(u, v)$ de $U \times V$ et son image par cette injection.

Soit $S$ le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par les éléments $(u + u', v) - (u, v) - (u', v)$, $(u, v + v') - (u, v) - (u, v')$, $(\lambda u, v) - \lambda(u, v)$ et $(u, \lambda v) - \lambda(u, v)$, pour tous $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ et $\lambda \in \Bbbk$. En outre, considérons l'application

$$t\, :\, U \times V \overset{inj.can.}{\longrightarrow} F \overset{proj.can.}{\longrightarrow} F/S.$$

Il est clair que $t$ est une application bilinéaire.

Nous allons montrer que le couple $(F/S, t)$ est un produit tensoriel de $U$ et $V$.

Soit $W$ un $\Bbbk$-espace vectoriel et $f\, :\, U \times V \longrightarrow W$ une application bilinéaire. Il existe un morphisme $\Phi\, :\, F \longrightarrow W$ de $\Bbbk$-espaces vectoriels, tel que, pour tout $(u, v) \in U \times V$, $\Phi((u, v)) = f(u, v)$. Il est clair que $\Phi(S) = 0$, de sorte que $\Phi$ induit un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $\phi\, :\, F/S \longrightarrow W$ tel que, pour tout $(u, v) \in U \times V$, $\phi(t(u, v)) = f(u, v)$. Ainsi, $\phi \circ t = f$.

De plus, tout morphisme $\psi\, :\, F/S \longrightarrow W$ de $\Bbbk$-espaces vectoriels tel que $\psi \circ t = f$ doit coincider avec $t$ puisque $\psi$ et $\phi$ donnent la même image aux élements $t(u, v)$, $(u, v) \in U \times V$, qui engendrent le $\Bbbk$-espace vectoriel $F/S$. ■

**Remarque 1.5** – Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels.

1. Compte tenu de l'unicité, à isomorphisme près, d'un produit tensoriel, on parlera par abus de langage *du* produit tensoriel de $U$ et $V$.
2. Le produit tensoriel de $U$ et $V$ construit à la Proposition 1.4 sera noté $U \otimes V$. Pour $(u, v) \in U \times V$, on pose $u \otimes v = t(u, v)$. Un tenseur pur est, par définition, un élement de $U \otimes V$ de la forme $u \otimes v$, où $(u, v) \in U \times V$.
3. Si $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ et $\lambda \in \Bbbk$, on a $(u+u')\otimes v = u\otimes v+u'\otimes v$, $u\otimes(v+v') = u\otimes v+u\otimes v'$ et $\lambda(u\otimes v) = (\lambda u)\otimes v = u\otimes(\lambda v)$ dans $U\otimes V$. En particulier, pour $(u, v) \in U\times V$, $0\otimes v = u\otimes 0 = 0$ et $-(u \otimes v) = (-u) \otimes v = u \otimes (-v)$.
4. Les tenseurs purs forment une famille génératrice du $\Bbbk$-espace vectoriel $U \otimes V$, mais pas une base en général. Par suite, tout élément de $U \otimes V$ peut être écrit comme combinaison linéaire de tenseurs purs, mais en général pas de manière unique.

**Proposition 1.6** – *Soient $f\, :\, U \longrightarrow U'$ et $g\, :\, V \longrightarrow V'$ des morphismes de $\Bbbk$-espaces vectoriels. Il existe un unique morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $h\, :\, U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V'$ tel que, pour tout $(u, v) \in U \times V$, $h(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$.*

*Démonstration :* Il est facile de vérifier que l'application $U\times V \longrightarrow U'\otimes V'$, $(u, v) \mapsto f(u)\otimes g(v)$ est bilinéaire. Par définition du produit tensoriel, elle induit donc une application linéaire $h$ comme dans l'énoncé. L'unicité de $h$ est évidente puisque l'image de la famille génératrice formée par les tenseurs purs est contrainte. ■

**Notation 1.7** – Soient $f : U \longrightarrow U'$ et $g : V \longrightarrow V'$ des morphismes de $\Bbbk$-espaces vectoriels. L'application linéaire $h : U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V'$ définie à la Proposition 1.6 sera notée $f \otimes g$ et appelée le produit tensoriel des applications $f$ et $g$.

**Remarque 1.8** – Dans les notations de la Proposition 1.6, il est clair que, si $f : U \longrightarrow U'$ et $g : V \longrightarrow V'$ sont surjectives, alors $f \otimes g$ l'est aussi.

**Proposition 1.9** – *Soient $U \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{f'} U''$ et $V \xrightarrow{g} V' \xrightarrow{g'} V''$ des morphismes de $\Bbbk$-espaces vectoriels. Alors, on a $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$.*

*Démonstration :* Exercice (facile). ∎

**Corollaire 1.10** – *Soient $U \xrightarrow{f} U'$ et $V \xrightarrow{g} V'$ des isomorphismes de $\Bbbk$-espaces vectoriels. Alors, $f \otimes g : U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V'$ est un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels.*

*Démonstration :* C'est une conséquence facile de la Proposition 1.9. ∎

## 2 Des isomorphismes utiles.

Le corps $\Bbbk$ est bien sûr un $\Bbbk$-espace vectoriel. Le résultat suivant montre que la tensorisation d'une $\Bbbk$-espace vectoriel quelconque avec $\Bbbk$ produit un $\Bbbk$-espace vectoriel qui lui est isomorphe.

**Proposition 2.1** – *Soit $U$ un $\Bbbk$-espace vectoriel.*
*1. Il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $\Bbbk \otimes U \longrightarrow U$ tel que, pour tout $(\lambda, u) \in \Bbbk \times U$, $\lambda \otimes u \mapsto \lambda u$.*
*2. Il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $U \otimes \Bbbk \longrightarrow U$ tel que, pour tout $(u, \lambda) \in U \times \Bbbk$, $u \otimes \lambda \mapsto \lambda u$.*

*Démonstration :* 1. L'unicité est claire puisqu'on impose l'image d'une famille génératrice de $\Bbbk \otimes U$. L'application $\Bbbk \times U \longrightarrow U$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est bilinéaire. Elle induit donc un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $\mu : \Bbbk \otimes U \longrightarrow U$ tel que, pour tout $(\lambda, u) \in \Bbbk \times U$, $\mu(\lambda \otimes u) = \lambda u$. D'autre part, il est clair que l'application $U \longrightarrow \Bbbk \otimes U$, $u \mapsto 1 \otimes u$ est un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels inverse de $\mu$.
2. La démonstration est identique à celle du Point 1. ∎

**Proposition 2.2** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels*

$$\tau \quad : \quad U \otimes V \quad \longrightarrow \quad V \otimes U$$

*tel que, pour $u \in U$ et $v \in V$, $\tau(u \otimes v) = v \otimes u$.*

*Démonstration :* L'unicité est claire puisqu'on impose l'image d'une famille génératrice de $U \otimes V$. Par ailleurs, il est clair que l'application

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \longrightarrow & V \otimes U \\ (u, v) & \mapsto & v \otimes u \end{array}$$

est bilinéaire. Par définition du produit tensoriel, il existe donc une application $\tau$ comme dans l'énoncé. ∎

**Proposition 2.3** – *Soient $U$, $V$ et $W$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels*

$$\phi \ : \ U \otimes (V \otimes W) \ \longrightarrow \ (U \otimes V) \otimes W \ ,$$

*tel que, pour tout $(u, v, w) \in U \times V \times W$, $\phi(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$.*

*Démonstration :* Il est facile de démontrer que l'ensemble des éléments de la forme $u \otimes (v \otimes w)$, $(u, v, w) \in U \times V \times W$, engendre l'espace vectoriel $U \otimes (V \otimes W)$. L'unicité est donc claire.

Soit $u \in U$. Il est facile de vérifier que l'application $V \times W \longrightarrow (U \otimes V) \otimes W$, $(v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$, est bilinéaire. Elle induit donc un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$f_u : V \otimes W \longrightarrow (U \otimes V) \otimes W$$

tel que, pour tout $(v, w) \in V \times W$, $f_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. On peut donc considérer l'application

$$\begin{array}{ccc} U \times (V \otimes W) & \longrightarrow & (U \otimes V) \otimes W \\ (u, p) & \mapsto & f_u(p) \end{array} .$$

Soient $\lambda \in \Bbbk$ et $u, u' \in U$, on vérifie facilement que $f_{u+u'} = f_u + f_{u'}$ et $f_{\lambda u} = \lambda f_u$. Il s'ensuit que l'application ci-dessus est bilinéaire, de sorte qu'il existe un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$\phi \ : \ U \otimes (V \otimes W) \ \longrightarrow \ (U \otimes V) \otimes W$$

qui, pour tout $(u, v, w) \in U \times V \times W$, envoie $u \otimes (v \otimes w)$ sur $(u \otimes v) \otimes w$.

De la même manière, on peut définir un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$(U \otimes V) \otimes W \ \longrightarrow \ U \otimes (V \otimes W)$$

qui, pour $(u, v, w) \in U \times V \times W$, envoie $(u \otimes v) \otimes w$ sur $u \otimes (v \otimes w)$.

Ce morphisme est inverse de $\phi$ et le résultat s'ensuit. ∎

**Proposition 2.4** – *Soient $U$ un $\Bbbk$-espace vectoriel et $(V_i)_{i \in I}$ une famille, indexée par un ensemble non vide $I$, de $\Bbbk$-espaces vectoriels. Il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels*

$$\Theta \ : \ U \otimes \left( \bigoplus_{i \in I} V_i \right) \ \longrightarrow \ \bigoplus_{i \in I} (U \otimes V_i)$$

*telle que, pour $u \in U$ et $(v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} V_i$, $\Theta(u \otimes (v_i)_{i \in I}) = (u \otimes v_i)_{i \in I}$.*

*Démonstration :* L'existence de l'application $\Theta$ ne pose pas de difficulté. Il est plus délicat de montrer qu'elle est un isomorphisme. Pour cela, on pourra construire une application inverse pour $\Theta$. ∎

**Remarque 2.5** –
1. Bien sur, le résultat de la Proposition 2.4 a un analogue où la somme directe apparait à gauche du produit tensoriel plutôt qu'à droite.
2. La Proposition 2.4, jointe au Point 1 ci-dessus montre que, si $I$ et $J$ sont des ensembles non vides et $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ des familles, indexées respectivement par $I$ et $J$ de $\Bbbk$-espaces vectoriels, il existe un unique isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$\Theta \ : \ \left( \bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes \left( \bigoplus_{i \in I} V_i \right) \ \longrightarrow \ \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (U_i \otimes V_j)$$

telle que, pour $(u_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} U_i$ et $(v_j)_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J} V_j$, $\Theta((u_i)_{i \in I} \otimes (v_j)_{j \in J}) = (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

Le second point de la Remarque 2.5 a une conséquence très utile sur les bases dans les produits tensoriels. C'est cette conséquence que nous décrivons maintenant.

**Proposition 2.6** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels, $I$ et $J$ des ensembles et $(b_i,\, i \in I)$, $(c_j,\, j \in J)$ des bases de $U$ et $V$, respectivement. Alors, la famille $(b_i \otimes c_j,\, (i,j) \in I \times J)$ est une base du $\Bbbk$-espace vectoriel $U \otimes V$.*

*Démonstration :* Les détails sont laissés en exercice. Si, pour tout $i \in I$, on pose $B_i = \Bbbk$, on a un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$U \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} B_i,$$

entre $U$ et la somme directe (externe) des $B_i$, $i \in I$, qui envoie $u \in U$ sur la famille de ses coefficients dans la base $(b_i,\, i \in I)$. De même, en posant $C_j = \Bbbk$, pour $j \in J$, on a un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j \in J} C_j,$$

entre $V$ et la somme directe (externe) des $C_j$, $j \in J$, qui envoie $v \in V$ sur la famille de ses coefficients dans la base $(c_j,\, j \in J)$. On peut alors tensoriser les deux isomorphismes ci-dessus (cf. Corollaire 1.10) et obtenir un isomorphisme

$$U \otimes V \xrightarrow{\sim} \left( \bigoplus_{i \in I} B_i \right) \bigotimes \left( \bigoplus_{j \in J} C_j \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} \left( B_i \bigotimes C_j \right),$$

le second isomorphisme étant fourni par le second point de la Remarque 2.5. (On remarquera que chaque $B_i \bigotimes C_j$, $(i,j) \in I \times J$, est un $\Bbbk$-espace vectoriel isomorphe à $\Bbbk$, d'après la Proposition 2.1.) Il est alors facile de montrer que la famille $(b_i \otimes c_j,\, (i,j) \in I \times J)$ est envoyée par ce dernier isomorphisme sur une base de l'espace d'arrivée. Cette famille est donc une base. ■

La Proposition 2.6 a un certain nombre de conséquences très utiles dans la pratique.

**Corollaire 2.7** – *Soient $U$ et $V$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors, le $\Bbbk$-espace vectoriel $U \otimes V$ est de dimension finie et* $\dim_{\Bbbk}(U \otimes V) = \dim_{\Bbbk}(U) \dim_{\Bbbk}(V)$.

*Démonstration :* C'est une conséquence immédiate de la Proposition 2.6. ■

**Corollaire 2.8** – Soient $U$, $U'$, $V$ et $V'$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels et $f : U \longrightarrow U'$ et $g : V \longrightarrow V'$ des applications linéaires. Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $f \otimes g$ l'est aussi.

*Démonstration :* Les détails sont laissés en exercice. On pourra considérer une base $(b_i,\, i \in I)$ de $U$ et une base $(c_j,\, j \in J)$ de $V$. Par hypothèse sur $f$ et $g$, $(f(b_i),\, i \in I)$ est une famille libre de $U'$ et on peut la compléter en une base $\mathbf{b}'$ de $U'$. De même, la famille $(g(c_j),\, j \in J)$ est une base de $V'$ et on peut la compléter en une base $\mathbf{c}'$ de $V'$. La famille $(b_i \otimes c_j,\, (i,j) \in I \times J)$ est alors une base de $U \otimes V$ dont l'image par $f \otimes g$ est une famille libre. Donc $f \otimes g$ est injective. ■

On termine par un résultat qui relie (en dimension finie) les espaces d'homomorphismes et la dualité, via le produit tensoriel.

Soient $V$ et $W$ deux $\Bbbk$-espaces vectoriels. On note $V^*$ le dual de $V$. Soient alors $\xi \in V^*$ et $w \in W$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcccl} e_{\xi,w} & : & V & \longrightarrow & W \\ & & v & \mapsto & \xi(v)w \end{array}.$$

Il est facile de vérifier que $e_{\xi,w}$ est une application linéaire (nulle si $w = 0$ ou $\xi = 0$ et de rang 1 sinon). On peut alors considérer l'application

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & V^* \times W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W) \\ & & (\xi, w) & \mapsto & e_{\xi,w} \end{array}.$$

Une vérification immédiate montre que $\varphi$ est une application bilinéaire. Elle induit donc une application linéaire

$$\overline{\varphi} \ : \ V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$$

telle que, $\forall\, (\xi, w) \in V^* \times W$, $\overline{\varphi}(\xi \otimes w) = e_{\xi,w}$.

**Proposition 2.9** – *On reprend les notations ci-dessus. Si $V$ et $W$ sont de dimension finie, l'application $\overline{\varphi}$ est bijective.*

*Démonstration :* On laisse les détails en exercice. On pourra considérer une base $(b_1, \ldots, b_m)$ de $V$ et sa base duale $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, ainsi qu'une base $(c_1, \ldots, c_n)$ de $W$. Pour tous $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$, on note $f_{i,j}$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ tel que, pour tout $1 \le k \le m$, $f_{i,j}(b_k) = \delta_{j,k} c_i$. On sait qu'alors $(f_{i,j},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ est une base de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$. On constate ensuite que, pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$, on a $\overline{\varphi}(\xi_j \otimes c_i) = f_{i,j}$. ∎

## Références.


**[Greub-1978]** W. Greub. Multilinear Algebra. Second edition. Universitext. *Springer-Verlag, New-York, 1978.*

**[Jacobson-1989]** N. Jacobson. Basic Algebra II. *W.H. Freedman and Compagny, New-York, 1989.*

**[Rotman-2009]** J.J. Rotman. An introduction to homological algebra. Second edition. Universitext. *Springer, Berlin, 2009*