<u>Observation :</u> cet exercice est l'analogue affine de l'exercice 6.18 du Chapitre VI.

1. On note Ω le milieu du segment $[AB]$ càd l'isobarycentre de A et B. Ce point est caractérisé par $\overrightarrow{\Omega A} = -\overrightarrow{\Omega B}$. On note P l'hyperplan affine contenant Ω et dont la direction est le plan vectoriel $\vec{P} = (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^{\perp}$. Enfin, on note f la symétrie orthogonale affine par rapport à P (et donc ~~..~~ ~~..~~ parallèlement à la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{AB}$).

Par définition, $\Omega \in P$ et la droite $(A\Omega) = (AB)$ contient A et est orthogonale à P. Ainsi Ω est le projeté orthogonal de A sur P. Il s'ensuit que, par déf., le sym. $\perp$ de A par rapp. à P est l'unique point, $f(A)$, tq $\overrightarrow{Af(A)} = 2\overrightarrow{A\Omega}$. On a donc $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(A)} = 2\overrightarrow{A\Omega}$ soit encore $\overrightarrow{\Omega f(A)} = \overrightarrow{A\Omega} = \cancel{\overrightarrow{\Omega B}}$. Donc $f(A) = B$. Ainsi, f est une réflexion qui envoie A sur B. Bien sûr, $f^2 = id$, donc f envoie B sur A.

Il reste à démontrer l'unicité. Si donc σ une réflexion affine t.q. $\sigma(A) = B$. Comme $\sigma^2 = id$, on a aussi $\sigma(B) = A$. Et comme une application affine préserve les

barycentres, on doit avoir $\sigma(\Omega) = \Omega$. Il s'ensuit que $\vec{\sigma}(\vec{A\Omega}) = \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(\Omega)} = \vec{B\Omega}$
et $\vec{\sigma}(\vec{B\Omega}) = \overrightarrow{\sigma(B)\sigma(\Omega)} = \vec{A\Omega}$

En procédant de même avec f : $f(\Omega) = \Omega$
et $\vec{f}(\vec{A\Omega}) = \vec{B\Omega}$.

Pcq, les réflexions $\vec{\sigma}$ et $\vec{f}$ envoient $\vec{A\Omega}$ sur $\vec{B\Omega}$ la partie "unicité" de l'ex VI.6.18 assure donc que $\vec{f} = \vec{\sigma}$. Mais, on a aussi $f(\Omega) = \sigma(\Omega)$. Donc $f = \sigma$. On a démontré l'unicité.

2. Soit M un point de E. On doit mq

$$AM = BM \quad \underline{\text{ssi}} \quad M \in P$$

<u>Obs.</u> : Par déf. de P, un point M est de P <u>ssi</u> $\vec{\Omega M}$ est orthogonal à $\vec{AB}$.

Soit $M \in E$. On note R le projeté orthogonal de M sur (AB). On a alors

$$\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AR} + \vec{RM}\|^2 = (\vec{AR} + \vec{RM} \mid \vec{AR} + \vec{RM})$$
$$= (\vec{AR} \mid \vec{AR}) + (\vec{RM} \mid \vec{RM}) \text{ cf } (\vec{AR} \mid \vec{RM}) = 0$$
$$= \|\vec{AR}\|^2 + \|\vec{RM}\|^2$$

(c'est le théo. de Pythagore !!!)

De même $\|\vec{BM}\|^2 = \|\vec{BR}\|^2 + \|\vec{RM}\|^2$

On a donc $AM = BM$ <u>ssi</u> $AR = BR$

Mais, comme $R \in (AB)$, on a $AR = BR$ ssi $R = \Omega$ (je vous laisse la dém. de ce petit résultat facile en exercice à faire seul).

Ce qui précède mq : $A\Pi = B\Pi$ ssi $R = \Omega$

càd ssi le projeté orth. de Π sur (AB) est Ω

càd ssi $\overrightarrow{\Omega\Pi} \perp \overrightarrow{AB}$

càd ssi $\Pi \in P$ (cf. Observat°).

Commentaire : il va sans dire qu'il faut faire une figure pour deviner qu'on doit raisonner ainsi. Faites-en donc une !!!