A&G 1

L. Rigal

2024-2025

Solution détaillée de l'exercice 8.66.

1. On c̃ $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice repr. de la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8/5 & 0 & -2/5 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique.

On a donc que
$$u(e_2) = -2e_2$$
$$u(e_1 - 4e_3) = 0$$
$$u(e_1 + e_3) = -2(e_1 + e_3)$$

Ainsi $e_2$ et $e_1 + e_3$ sont v.p. de v.p. $-2$

et $e_1 - 4e_3$ est v.p. de v.p. $0$.

Par csq $\quad \mathrm{Vect}\{e_2, e_1 + e_3\} \subseteq \mathrm{Ker}(u + 2id) \quad (*)$

$\qquad\qquad \mathrm{Vect}\{e_1 - 4e_3\} \subseteq \mathrm{Ker}(u) \quad (**)$

et $\quad \mathrm{Vect}\{e_2, e_1 + e_3\} \oplus \mathrm{Vect}\{e_1 - 4e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Comme $\{e_2, e_1 + e_3, e_1 - 4e_3\}$ est une famille libre, et donc une base de $\mathbb{R}^3$, on a que $(*)$ et $(**)$ sont en fait des égalités.

Finalement $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u + 2id) \oplus \mathrm{Ker}(u)$ ; c'est-à-dire que $u$ est diagonalisable.

Commentaire : la méth. ci-dessus n'est, bien sûr, pas toujours applicable puisqu'elle exploite la simplicité de A. Elle est néanmoins préférable à la méthode usuelle (calcul du poly. caract. .... ).

2. On $\tilde{c}$ $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

On peut observer que $u(e_1 + e_2 - e_3) = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ et $0$ est donc v.p. de $u$.
Soit $\chi_u$ le pol. caract. de $u$. Un calcul sans difficulté montre que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_u(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Les valeurs propres de $u$ sont donc $0$ (de multipl. algébrique $1$) et $2$ (de mult. alg. $2$) et par csq : 1) $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$

2) $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(u - 2id)) \leq 2$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u - 2id) \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} -4x + 8y + 6z = 0 \\ -4x + 8y + 6z = 0 \\ 4x - 8y - 6z = 0 \end{cases}$$

Ceci démontre que $\mathrm{Ker}(u - 2id)$ est un plan dont $\{(2, 1, 0), (3, 0, 2)\}$ est une base.
En conclusion : $u$ est diagonalisable, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2id)$ et la famille $\{(1,1,-1), (2,1,0), (3,0,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise $u$.

$\diagup 2$

3. On considère $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\chi_u$ le polyn. caract. de $u$. Un calcul simple assure que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_u(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2$$

On a donc que 2 et 4 sont les v.p. de $u$ et que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u - 2\,id)) = 1$$

$$1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(u - 4\,id)) \leq 2.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u - 2\,id)$ ssi $\begin{cases} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u - 2\,id) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u - 4\,id)$

ssi $\begin{cases} 4x - y - 5z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases}$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u - 4\,id) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$.

Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u - 4\,id)) < 2$, $u$ n'est pas diagonalisable. Cependant, pour tout vecteur $v$ tq $\mathcal{F} = \{(1,1,1), (1,-1,1), v\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$ Donc $u$ est trigonalisable.

/3

4. On c̃ $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Soit $\chi_u$ le polyn. caract. de $u$. Un calcul simple montre que,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_u(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

Un calcul simple montre que

$$\ker(u - 2\,id) = \mathrm{Vect}\{(4, 15, 10)\}$$

et que

$$\ker(u - id) = \mathrm{Vect}\{(1, 5, 3)\}$$

Donc $u$ n'est pas diagonalisable. Mais dans toute base $\{(4, 15, 10), (1, 5, 3), v\}$, la matrice de $u$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $u$ est trigonalisable.

/4

5. On considère $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\chi_u$ le polyn. caract. de $u$. Un calcul simple montre que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_u(\lambda) = -(\lambda+2)^3$.
On constate aussi par un calcul classique que

$$\operatorname{Ker}(u+2id) = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 - e_3\}.$$

On déduit de cela que $u$ n'est pas diagonalisable puisque $\dim(u+2id) < 3$.
Cela étant, le polyn. caract. de $u$ est scindé et $u$ est donc trigonalisable. Pour le trigonaliser, on va suivre la méth. constructive de l'ex. 8.65.

•) <u>Calcul de $\operatorname{Im}(u+2id)$</u>.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(u+2id) &= \operatorname{Vect}\{(u+2id)(e_1), (u+2id)(e_2), (u+2id)(e_3)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(-5,-4,5), (2,2,-2), (-3,-2,3)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(2,2,-2), (-3,-2,3)\}\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im}(u+2id)$ est un hyperplan (ce que l'on savait déjà avec le théorème du rang et $\mathrm{Ker}(u+2id)$) et $\mathcal{F} = \{(1,1,-1), (3,2,-3)\}$ en est une base.

Pour l'hyperplan H de l'ex. 8.65, on peut donc prendre $H = \mathrm{Im}(u+2id)$ et compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B} = \{(1,1,-1), (3,2,-3), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Les résultats de l'ex. 8.65 prévoient que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mais $u((1,1,-1)) = (-2,-2,2) = -2(1,1,-1)$.

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Et comme $u((3,2,-3)) = -2(1,1,-1) - 2(3,2,-3)$,

$u((1,0,0)) = -2(1,1,-1) - (3,2,-3) - 2(1,1,0)$,

on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. On considère $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\chi_u$ le polynome caract. de $u$. Un calcul simple mq : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_u(\lambda) = -(\lambda+2)^3$.

On vérifie aussi facilement que

$$\mathrm{Ker}(u + 2id) = \mathrm{Vect}\{(e_1 + e_2 - e_3)\}$$

On en déduit, avec l'exercice 8.65 que $u$ n'est pas diag. mais est trigonalisable.

On trigonalise $u$ en suivant la méthode constructive de l'exercice 8.65.

On vérifie facilement que

$$\mathrm{Im}(u + 2id) = \mathrm{Vect}\{(+1, 1, -1), (1, 0, 0)\}.$$

Avec les notations de 8.65, on pose

$$H = \{(1, 1, -1), (1, 0, 0)\}.$$

On complète la base de $H$ ci-dessus en une base de $\mathbb{R}^3$ : $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

/7

Un calcul simple montre qu'alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ 0 & -2 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{B}$ trigonalise $u$.

<u>Observation</u> : Dans les cas 5 et 6 de cet exercice, on a eu beaucoup de chance !!! Dans le processus de trigonalisat° prévu par 8.65, on a, à priori, deux étapes avant de parvenir à nos fins :

<u>1<sup>re</sup> étape</u> : passage de la matrice initiale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ à une matrice } \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

<u>2<sup>e</sup> étape</u> passage de la matrice

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ à une matrice } \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Dans les solutions présentées ici pour 5 et 6, ces deux étapes se sont fondues en une seule et on est directement passé de A à ~~Mn~~ une matrice triangulaire ! Cela tient au fait que, ds la base considérée pour H on a pris, par chance, un vecteur qui est dans $\mathrm{Im}(u + 2id)$, mais aussi ds $\mathrm{Ker}(u + id)$.

Dans le cas général, on peut bien sûr ne pas avoir cette chance. Par ex, si l'on prend pour $H$ la base $\{(1,-1,1), (1,0,0)\}$ et qu'on la complète en une base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$, on aura

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & * \\ -8 & -6 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas encore triangulaire. Il faudra donc une deuxième étape pour conclure.