solut° détaillée de

Exercice VI.8.68

On considère $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$$(x,y,z) \mapsto (-2y, x-z, 2y)$$

de sorte que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ ($\mathcal{E}$: base can. de $\mathbb{R}^3$).

Alors : $\chi_u(X) = -X(X^2+4)$; donc χ_u qui est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé. Il s'ensuit que u n'est ni diag. ni même trigonalisable. Ceci revient à dire que A considérée comme matrice de $M_3(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable ni même trigonalisable.

<u>Passons dans $\mathbb{C}$</u> : on peut voir A comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$; on définit alors $v : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$
$$(x,y,z) \mapsto (-2y, x-z, 2y)$$

de sorte que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v)$ (où $\mathcal{E}$: base can. de $\mathbb{C}^3$).

Alors $\chi_v(X) = -X(X-2i)(X+2i) \in \mathbb{C}[X]$, bien-sûr χ_v est scindé (on est sur $\mathbb{C}$) de plus il n'a que des racines simples et donc v est diagonalisable. Ceci revient à dire que A vue comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

<u>Diagonalisation de v</u> : spec $v = \{0, -2i, 2i\}$.

E_0 : $X = (x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ est dans E_0 ssi
$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$; ainsi $E_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_1\}$ où $f_1 = (1, 0, 1)$.

E_{2i} : $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ est dans E_{2i} si

$\begin{cases} -2y = 2ix \\ x - z = 2iy \\ 2y = 2iz \end{cases}$ càd si $\begin{cases} x = iy \\ \\ z = -iy \end{cases}$ donc $E_{2i} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_2\}$

où $f_2 = (-1, i, 1)$

E_{-2i} : $X = (x, y, z) \in E_{-2i}$ si

$\begin{cases} -2y = -2ix \\ x - z = -2iy \\ 2y = -2iz \end{cases}$ càd si $\begin{cases} x = -iy \\ \\ z = iy \end{cases}$ donc $E_{-2i} = \mathrm{Vect}\{f_3\}$ où $f_3 = (-1, -i, 1)$.

Posant $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$, on obtient une base de $\mathbb{C}^3$ telle que :

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \text{ et } P = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{pmatrix}$; de plus

$D = P^{-1} A P$. Donc $A = P D P^{-1}$ ce dont on déduit que $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$.
Le calcul explicite de PD^nP^{-1} donne

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2i)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{pmatrix} = \frac{(2i)^n}{4}\begin{pmatrix} \alpha & 2i\beta & -\alpha \\ -i\beta & 2\alpha & i\beta \\ -\alpha & -2i\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha = 1 + (-1)^n$ et $\beta = 1 - (-1)^n$

<u>En particulier</u> : pour $p \in \mathbb{N}$: $A^{2p} = (-4)^{p-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 & +2 \\ 0 & -4 & 0 \\ +2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^{2p+1} = (-4)^p \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Remarque</u> Un autre choix de f_1, f_2, f_3 donne un P différent mais le même A^n évidemment ! Notons que pour $n = 1$ la formule ci-dessus redonne bien A, pour $n = 0$ la formule ci-dessus ne donne pas I_3 mais ce n'est pas étonnant, déjà le problème se pose pour D. Moralité : faites vos vérif. avec $n \geq 1$!