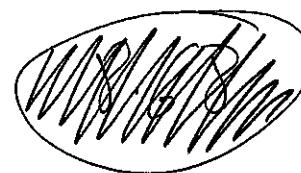


Solut° détaillée de

VI.

Exercice 8.68



On considère

$$u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-y, x-z, y)$$

de sorte que $F = \text{Mat}_{\mathbb{R}}(u)$ (\mathcal{E} : base can. de \mathbb{R}^3).

Alors : $\chi_u(X) = -X(X^2 + 4)$, donc χ_u qui est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé. Il s'ensuit que u n'est ni diag. ni même trigonalisable. Ceci revient à dire que F considérée comme matrice de $M_3(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable ni même trigonalisable.

Parmi dans \mathbb{C} : on peut voir F comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$; on définit alors $v: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (-y, x-z, y)$$

de sorte que $F = \text{Mat}_{\mathbb{C}}(v)$ (où \mathcal{E} : base can. de \mathbb{C}^3).

Alors $\chi_v(X) = -X(X-2i)(X+2i) \in \mathbb{C}[X]$, bien sûr χ_v est scindé (on est sur \mathbb{C}) et plus il n'a que des racines simples et donc v est diagonalisable. Ceci revient à dire que F vue comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Diagonalisation de v : $\text{spec } v = \{0, -2i, 2i\}$.

E_0 : $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et dans E_0 si

$$\begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

; alors $E_0 = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{f_1\}$ où $f_1 = (1, 0, 1)$.

$E_{2i} : X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et dans E_{2i} on

$$\begin{cases} -2y = 2ix \\ x-z = 2iy \\ 2y = 2iz \end{cases} \text{ càd oni} \begin{cases} x = iy \\ z = -iy \end{cases} \text{ donc } E_{2i} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_2\}$$

ou $f_2 = (-1, i, 1)$

$E_{-2i} : X = (x, y, z) \in E_{-2i}$ on

$$\begin{cases} -2y = -2ix \\ x-z = -2iy \\ 2y = -2iz \end{cases} \text{ càd oni} \begin{cases} x = -iy \\ z = iy \end{cases} \text{ donc } E_{-2i} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_3\}$$

ou $f_3 = (-1, -i, 1)$.

Pasant $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$, on obtient une base de \mathbb{C}^3 telle que :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \text{ et } P = P_{E, \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{pmatrix}$; de plus

$D = P^{-1} A P$. Donc $A = P D P^{-1}$ ce dont on déduit que $A^n = (P D P^{-1})(P D P^{-1}) \dots (P D P^{-1})(P D P^{-1}) = P D^n P^{-1}$. Le calcul explicite de $P D^n P^{-1}$ donne

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{pmatrix} = \frac{(2i)^n}{4} \begin{pmatrix} \alpha & 2i\beta & -\alpha \\ -i\beta & 2\alpha & i\beta \\ -\alpha & -2i\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha = 1 + (-1)^n$ et $\beta = 1 - (-1)^n$

En particulier : pour $p \in \mathbb{N}$: $A^p = (-4)^{p-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^{p+1} = (-4)^p \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque Un autre choix de f_1, f_2, f_3 donnera un P différent mais le même A^n évidemment! Notons que pour $n=1$ la formule ci-dessus redonne bien A ; pour $n=0$ la formule ci-dessus ne donne pas I_3 , mais ce n'est pas rédhibitoire, déjà le problème se pose pour D . Floraâtre : faites vos vérif. avec $n \geq 1$!