Solution de l'Exercice VI.8.69

On cherche à diagonaliser A.

<u>1er cas : $b = 0$.</u> Alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; <u>si $a \neq 0$</u> alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$. On en déduit que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ si $n \geq 1$

et que $A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} a^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-n} \end{pmatrix}$ si $n \geq 1$.

Donc, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$, formule qui s'étend au cas $n = 0$ puisqu'on retombe alors sur la convention usuelle $A^0 = I$.

<u>Si $a = 0$</u> alors $A = 0$ (matrice nulle). Alors, il est clair que $A^n = 0$ pour $n \geq 1$. D'autre part A^n, $n < 0$ n'a pas de sens car A^{-1} n'existe pas. Enfin, on peut toujours poser $A_0 = I_3$.

<u>2e Cas : $b \neq 0$</u> On trouve $\chi_A = (2b + a - X)(a - b - \lambda)^2$.
Notons que $2b + a \neq a - b$.
Alors $\lambda_1 = a - b$ et $\lambda_2 = 2b + a$ sont les v.p. de A.
On note u l'endo. associé à A dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{C}^3$; alors on voit aisément que

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ et que

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons $\mathcal{F} = \{ f_1, f_2, f_3 \}$ avec $f_1 = (1, 0, -1)$
$f_2 = (1, -2, 1)$
$f_3 = (1, 1, 1)$

alors $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

On a :
$$D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u)$$

et
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{C},\mathcal{F}} , \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A^n = P D^n P^{-1}$ pour $\boxed{n > 0.}$

Le calcul donne :
$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $a_n = \frac{1}{3}\left(2(a-b)^n + (a+2b)^n \right)$, $b_n = \frac{1}{3}\left((a+2b)^n - (a-b)^n \right)$.

- Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, A^n pour $n < 0$ n'a pas de sens et on pose $A^0 = I_3$.
- Si $\lambda_1 \neq 0$ ~~et~~ $\lambda_2 \neq 0$, A^{-1} existe et on a $A^{-m} = P D^{-m} P^{-1}$ pour $m > 0$ de sorte que la formule $(*)$ ci-dessus est valable pour $n < 0$. Enfin pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ donc $(*)$ convient pour tout $n \in \mathbb{Z}$.