Solution détaillée de l'ex. VI.8.75

- On considère l'endo. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice ds la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a déjà vu (ex. VI.8.66) que :
- $\chi_u = (2-X)(4-X)^2$ et u est donc trigonal.
- dans une base $\mathcal{B}$ bien choisie, on a

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En fait, les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont forcés à être (à mult. près) : $(1,1,1)$ et $(1,-1,1)$ car les ss-esp. propres corresp. sont des droites.
Si pour le troisième on prend $(0,1,1)$, on trouve

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Mais on sait qu'on peut faire mieux (déc. de Dunford) et même bcp mieux (décomp. de Jordan).

La déc. de Jordan dit qu'il existe un vecteur (a, b, c) qui complète les deux précédents en une base de $\mathbb{R}^3$ et tq la matrice de u ds cette base soit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement qu'un tel (a, b, c) doit vérifier $u((a,b,c)) = (1,-1,1) + 4(a,b,c)$, càd

$$\begin{cases} 4a - b - 5c = 1 \\ -2a - b + c = -1 \end{cases}$$

On constate alors que $(a, b, c) = \frac{1}{3}(4, -2, 3)$ convient.
Ainsi, on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4/3 \\ 1 & -1 & -2/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

c'est la matrice de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ et donc $B = P^{-1}AP$.
Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

Le bien-fondé de cette approche tient à ce que $B = D + N$ où

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et ce, avec N nilpotente d'ordre 2 puisque $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, <u>et</u> D et N commutent.
On est en droit d'appliquer la formule du Binome puisque $DN = ND$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = (D+N)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k}$$
$$= \sum_{k=n-1}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k}$$
$$= \binom{n}{n-1} D^{n-1} N + \binom{n}{n} D^n$$
$$= n D^{n-1} N + D^n$$
$$= n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$
$$= n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^n \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Il reste à effectuer le produit $A^n = P B^n P^{-1}$ pour conclure.

/3

<u>Autre méthode :</u> Le Théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi_u(A) = 0$, c'est à dire que

$$A^3 - 10A^2 + 32A - 32I = 0$$

ou encore :

$$A^3 = 10A^2 - 32A + 32I$$

Ceci assure que toute puissance de A est comb. lin. des trois précédentes puissances. Une récurrence facile permet alors de calculer A^n, $n \geq 0$, à condition de calculer A^2.

Mais ceci est un peu lourd à mettre en place du point de vue calculatoire.

Soyons plus malins !

La division euclidienne assure que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X^n = \chi_u Q_n + R_n$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n et R_n sont des polynomes et où $\deg(Q_n) \leq 2$.

On aura donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \chi_u(A) Q_n(A) + R_n(A)$$
$$= R_n(A).$$

Il reste à calculer R_n (en évitant le calcul de Q_n) pour conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

Comme $X^n = Q_n \chi_n + R_n$, on a

1) $2^n = Q_n(2)\chi_n(2) + R_n(2) = R_n(2)$

2) $4^n = Q_n(4)\chi_n(4) + R_n(4) = R_n(4)$

et, comme 4 est racine de χ_n de mult. 2, on a

3) $$n 4^{n-1} = Q_n(2)\chi_n'(2) + Q_n'(2)\chi_n(2) + R_n'(2)$$
$$= R_n'(2)$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 16a_n + 4b_n + c_n = 4^n \\ 8a_n + b_n = n4^{n-1} \end{cases}$$

Il reste à résoudre ce système pour obtenir a_n, b_n, c_n, puis R_n, puis A^n via la relation

$$A^n = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I.$$