Ex. VII.6.17

$E = \mathbb{R}^3$ est vu comme e.v.e. pour la structure orientée standard. On considère l'endo. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice ds la b.c. $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Il est facile de vérifier que ${}^tAA = I_3$, càd que A est orthogonale. Comme $\mathcal{E}$ est une b.o.n., il s'ensuit que $f \in O(E)$. De plus, $\det(A) = -1$ et donc $f \in O(E) \setminus SO(E)$.

- La classification des élts de $O(E)$ assure alors que -1 est v.p. de f et ~~de~~ multiplicité 1 puisque $f \neq id_E$.
  Un calcul simple montre alors que

$$\mathrm{Ker}\,(f + id_E) = \mathrm{Vect}\,\{b_1\},$$

où $b_1 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$.

- La classif. des élts de $O(E)$ assure que, ~~[illegible]~~ il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, unique, tq dans toute b.o.n.d., commençant par b_1, la matrice de f soit

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right) ;$$

θ est alors appelé mesure d'angle de l'antirotation f relative à l'orientation de l'axe de f par b_1.

- On montre facilement que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une b.o.n.d. pour

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$b_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4)$$

En effet, $\mathcal{B}$ est une b.o.n.,

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et $\det(P) = 1$.

- Par déf. de θ, on a que $f(b_2) = \cos\theta\, b_2 + \sin\theta\, b_3$

Or :

$$f(b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{9}(9,9,0) = b_2 .$$

Donc $\theta = 0$.

- On a donc que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f est une réflexion, par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}\{b_2, b_3\}$.

<u>Compléments</u> : la méthode ci-dessus traite la question de la description géom. de f à l'aveugle, càd sans savoir, à priori, que f est une réflexion. Si, au contraire, on part de cette info. qui est donnée ds l'énoncé,(*) on peut régler le pb plus vite en calculant directement $\mathrm{Ker}(f - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + id_E)$.

De plus, le point 2 de l'ex. VII.6.16 assure que f est donnée par la formule :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (x,y,z) - 2\,\frac{((x,y,z)|b_1)}{(b_1,b_1)}\, b_1.$$

$$= (x,y,z) - \frac{2}{9}\big((x,y,z)\,|\,(e,-e,-1)\big)(e,-e,-1)$$

(*) et qui se déduit facilement du fait que ${}^tA = A$.

$$= (x,y,z) - \frac{2}{9}(2x - 2y - z)(2,-2,-1)$$

$$= (x,y,z) - \frac{2}{9}(4x - 4y - 2z, -4x + 4y + 2z, -2x + 2y + z)$$

$$= \frac{1}{9}(x + 8y + 4z, 8x + y - 4z, 4x - 4y + 7z),$$

ce qui n'est autre que la formule donnée directement par A.