$\boxed{\text{VII.6.23 (1)}}$

On se place ds $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa str. eucl., orientée, standard. On c̃ l'endo. dont la matrice de la b.c. $\mathcal{E}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Obs. préliminaires :</u> A est orthog. de déterm. égal à 1. Comme $\mathcal{E}$ est une b.o.n., f est une rotation. Il est clair, de plus, que $f \neq \mathrm{id}$. Donc, 1 est v.p. de f, de mult. 1 et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est l'axe de rotation de f.
Enfin, on sait que, une fois fixé un vecteur unitaire b_1 de v.p. 1, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, unique, tq la matrice de f ds toute b.o.n. d., commençant par b_1, soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Tout ce qui précède se trouve ds le cours.

• ~~Ker~~ On trouve que $\ker(f - id_E) = \mathrm{Vect}\{b_1\}$ où

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,-1).$$

De plus, si l'on pose $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$

et $b_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(2,3,3)$,

alors $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une b.o.n.d.

• D'après ce qui précède, on a

$$f(b_2) = \cos\theta\, b_2 + \sin\theta\, b_3.$$

Mais, $9\sqrt{2}\, f(b_2) = (5, 11, 4) = 5e_1 + 11e_2 + 4e_3$.

Comme, en outre :

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 0 & 2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix},$$

on a l'exp. de e_1, e_2, e_3 en fonct° de b_1, b_2, b_3, donnée par $P^{-1} = {}^tP$. Explicitement :

$$e_1 = 3/\sqrt{11}\, b_1 + 2/\sqrt{22}\, b_3,$$
$$e_2 = -1/\sqrt{11}\, b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + 3/\sqrt{22}\, b_3,$$
$$e_3 = -1/\sqrt{11}\, b_1 - 1/\sqrt{2}\, b_2 + 3/\sqrt{22}\, b_3.$$

On a donc :

$$9\sqrt{2}\, f(b_2) = 5\left(3/\sqrt{11}\, b_1 + 2/\sqrt{22}\, b_3\right) + 11(\dots) + 4(\dots)$$

$$= \left(\frac{11}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) b_2 + \left(\frac{10}{\sqrt{22}} + \frac{33}{\sqrt{22}} + \frac{12}{\sqrt{22}}\right) b_3$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}\, b_2 + \frac{55}{\sqrt{22}}\, b_3$$

Donc $f(b_2) = \frac{7}{18} b_2 + \frac{55}{18\sqrt{11}} b_3$.

(On note au passage que $\left(\frac{7}{18}\right)^2 + \left(\frac{55}{18\sqrt{11}}\right)^2 = 1$, comme prévu.)

Soit alors $\theta \in [0, 2\pi[$ tq $\cos\theta = \frac{7}{18}$ et $\sin\theta = \frac{55}{18\sqrt{11}}$.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right)$ et

f est la rotat° d'axe $\mathbb{R} b_1$ et dont la mesure d'angle relative au choix de b_1 pour orienter l'axe de f est l'unique θ de $[0, 2\pi[$ comme ci-dessus.