Ex. 6.23 (3) Partie VII (réf. actuelle)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$ et on note u l'endo. de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice ds la base canonique de $\mathbb{R}^3$

- Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une b.o.n. et comme ${}^tAA = I_3$, u est un endo. orthogonal.
- Comme de plus $\det(A) = 1$, u est une rotation.
- Enfin, $u \neq id_{\mathbb{R}^3}$, donc u est une rotation d'axe $\ker(u - id_{\mathbb{R}^3})$.

  Un calcul simple montre que

  $$\ker(u - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R} f_1 \quad \text{où} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

- On pose $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

  et $f_3 = (0,0,-1)$

  et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{F}$ est une b.o.n.d. (qui commence par f_1) et que donc u admet pour matrice dans $\mathcal{F}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est la mesure d'angle de u (relative au choix de f_1).

On trouve facilement que

$$u(f_2) = -f_3 \quad \text{et} \quad u(f_3) = f_2$$

donc $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$. Il s'ensuit que $\theta = -\pi/2$ (à 2π-près).