

Ex. 6.23

Partie VII.

(réf. actuelle)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$ et on note u l'endo. de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice ds la base canonique de \mathbb{R}^3

•) Comme la base canonique de \mathbb{R}^3 est une b.o.u. et comme ${}^G A A = I_3$, u est un endo. orthogonal.

•) Comme de plus $\det(A) = 1$, u est une rotation.

•) Enfin, $u \neq \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, donc u est une rotation d'axe $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Un calcul simple montre que

$$\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R} f_1 \quad \text{où} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0).$$

•) On pose $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$

$$\text{et} \quad f_3 = (0, 0, -1)$$

et $f_3 = \{ f_1, f_2, f_3 \}$. Il est facile de vérifier que f_3 est une b.o.u.d. (qui commence par f_1) et que donc u admet pour

matrice dans \mathcal{F}^3 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

où θ est la mesure d'angle de u (relative au choix de f_1).

On trouve facilement que

$$u(f_2) = -f_3 \quad \text{et} \quad u(f_3) = f_2$$

donc $\cos \theta = 0$ et $\sin \theta = -1$. Il s'ensuit
que $\theta = -\pi/2$ (à 2π -près).

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note u l'endo. de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice ds la base canonique.

Comme la b.c. est orthogonale et comme ${}^tAA = I_3$ et $\det(A) = -1$, on sait que u est une isométrie de det. -1 (cf 0.2 du cours). Le cours assure alors que u est la composée d'une rotation ρ d'axe $ku(u + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et d'une réflexion τ par rapport à l'orthogonal de cet axe.

Un calcul simple montre que $ku(u + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}f_1$ où $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. De plus, si l'on ~~pose~~ choisit f_2 et f_3 by $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ sont une b.o.n.d. la matrice de u ds \mathcal{F} sera de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et u sera composée de la rotation ρ et de la réflexion τ by

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\tau) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve que $\theta = \pi/3$ par la méthode habituelle: ρ est la rotation d'axe $\mathbb{R}f_1$ dont l'angle relatif au choix de f_1 est $\pi/3$ et σ est la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}f_1)^\perp$.