1. Par hypothèse, $\vec{E} = \vec{V} \oplus \vec{W}$.
Si l'on suppose que $V \cap W = \emptyset$, le Théorème d'incidence assure que le sous-espace affine engendré par $V \cup W$ est de dimension égale à $\dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$. Or $\vec{V} + \vec{W} = \vec{V} \oplus \vec{W} = \vec{E}$. Par suite, le sous-espace affine engendré par $V \cup W$ est de dimension $\dim(E) + 1$. C'est absurde puisqu'il est inclus dans E. Par conséquent, $V \cap W \neq \emptyset$.
De plus, et comme $V \cap W \neq \emptyset$, le Théorème 2.14 assure que $V \cap W$ est un sous-esp. affine de direction $\vec{V} \cap \vec{W}$ cad de direction $\{\vec{0}\}$. Ainsi, $V \cap W$ est un sous-esp. aff. de dimension 0, cad que $V \cap W$ est réduit à un point.

2. On a $\dim(\vec{D}) = 1$ et $\dim(\vec{P}) = 2$. De plus, $\{\vec{0}\} \subseteq \vec{D} \cap \vec{P} \subseteq \vec{D}$. Compte tenu des dimensions, on a donc $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$ ou $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$.

<u>1er cas</u> : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$. Dans ce cas, $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont en somme directe et, compte tenu de leurs dimensions, ils sont supplémentaires : $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{P}$. La question 1 assure alors que $D \cap P$ est un singleton.

<u>2e cas</u> : $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$. Dans ce cas, on a que $\vec{D} \subseteq \vec{P}$. (Donc D et P sont faiblement parallèles.)

<u>1er sous-cas</u> : $D \cap P = \emptyset$.

<u>2e sous-cas</u> : $D \cap P \neq \emptyset$. Alors, soit a un élt de $D \cap P$. Comme $a \in D$, on a

$$D = \{ T_{\vec{u}}(a),\ \vec{u} \in \vec{D} \}.$$

Et de même, comme $a \in P$, on a :

$$P = \{ T_{\vec{u}}(a), \ \vec{u} \in \vec{P} \}.$$

Mais $\vec{D} \subseteq \vec{P}$. Donc $D \subseteq P$.