Algèbre, semaine 5, 12/02/2021

Questions sur le cours ?
- Frobenius (utilisation d'espaces cycliques)
- Jordan ← 2 façons de gérer le fait qu'une
- Dunford ← matrice ne soit pas diagonalisable

Exos 4.1 (p. 38 et suite), 4.5, 4.6, 4.7, 4.8

4.1 E dim finie dim $E = n$

f endomorphisme s'écrit par blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$ $(d_1 \geqslant d_2 \geqslant \dots \geqslant d_r)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

dim Ker $f = 1$

$$n \updownarrow \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{d_1} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{matrix}}_{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \underbrace{\boxed{0}}_{\text{si } d_r = 1.} \end{pmatrix}$$

on a r blocs de Jordan

Ici 0 est la seule valeur propre.

3 notions de multiplicité :

* "géométrique" dim Ker $(f - \lambda I_d)$ ici pour $\lambda = 0$

  Dans l'exemple : $m(0) = r$ = nombre de blocs (image de dim $= n - r$)

* en tant que racine de χ_f

  $m_\chi(0) = n$ car $\chi_f = X^n$.

* en tant que racine de μ_f
$m_\mu(0) = d_1 =$ taille du plus gros bloc de Jordan.

Ex : $\left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & \\ \hdashline & & & 0 & 1 \\ & 0 & & & 0 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & 0 \\ & & 0 & & \\ \hdashline & 0 & & & 0 \end{array}\right)$ puis $\left(\quad \right)^3 = 0$

car $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Exo 4.5 (et suite)

Dunford : $\left[\begin{array}{l} \text{Si } \mu_f \text{ scindé, } \exists!(d, n) \text{ endomorphismes} \\ f = d+n, \ d \text{ diagonalisable, } n \text{ nilpotente, } d \text{ et } n \text{ commutent.} \end{array}\right.$
(Th 2.6 p.33)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

* Pour A, 1) A est-elle diagonalisable ? ou nilpotente ? NON et NON

$A = \underbrace{Id}_{\text{diago.}} + \underbrace{J_2}_{\text{nilpot.}}$ ces 2 termes commutent.
→ C'est la décomposition de Dunford.
(on a unicité de la décomp.)

* Pour B, B est diagonalisable.
$B = B + 0$ est la décomposition de Dunford.

* Pour C, C n'est pas diagonalisable. (cf v.p $\lambda = 1$)

Tests $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{D \text{ diago}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N \text{ nilp.}}$ mais $DN \neq ND$.
Ce n'est pas la décomp. de Dunford.

↳ v.p uniquement 1 et 2, de mult algébrique resp 2 et 1.
$\lambda=1$ est de mult. géométrique ($\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$) 2
$\lambda=2$ vérifie $\dim \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \geq 1$ (donc égal à 1)
Pour les 2 v.p, on a mult alg = mult géom. Donc diagonalisable

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp.}} \quad \text{mais } DN \neq ND.$$

il faut 0 pour être diagonalisable

$\boxed{\text{Si on veut } D \text{ triang sup., la diag vaut } (1,1,2)}$

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp.}}$$

On cherche à trouver a et b tq $DN = ND$. $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, système 2×2, avec une unique solution $\begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases}$

Rem : Dans la démo du cours, on obtient d et n sont des polynômes en f. Donc si f est dans une certaine base triang. sup, alors d et n seront aussi triang. sup. (d'où chercher D sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ conduisait forcément à la solution.)

Cherche aussi le 4.6 (la matrice diagonalisable associée se trouve directement avec l'indication)
→ Reprise à 9h45.

Exo 4.6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \chi_A = (X+1)^3$$

v.p de A : une seule qui est -1 de mult. géom ? ≥ 1 calcul pas nécessaire...
mult alg 3

Q: A diagonalisable ?

NON
Par l'absurde, si A est diagonalisable, $\dim(\mathrm{Ker}(A+\mathrm{Id}))=3$
donc $\dim(\mathrm{Im}(A+\mathrm{Id}))=0$
donc $A+\mathrm{Id}=0$
donc $A=-\mathrm{Id}$.

(En général si f a une unique valeur propre, alors on a l'équivalence
f diagonalisable $\Leftrightarrow f=\lambda\,\mathrm{Id}$.)

Notre raisonnement ici montre que dans Dunford, la matrice D est forcément $-\mathrm{Id}$.

le Thm. de Dunford assure sans calcul que N nilpotente et $DN=ND$.

La matrice N est donc $A-D=A+\mathrm{Id}$.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\quad \text{et } N=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}$$

N de rang 1
$\dim \mathrm{Ker}\, N=2$
$\Downarrow$ noyaux itérés (cf. TD2)
$\dim \mathrm{Ker}\, N^2>2 \Rightarrow N^2=0$

Pour calculer A^n, on peut utiliser le binôme de Newton.
(car D et N commutent).

$$A^n=(D+N)^n=(-\mathrm{Id}+N)^n$$

Indice de nilpotence de N: ≤ 3 (car $\dim E=3$)

$$=(-\mathrm{Id})^n+n(-\mathrm{Id})^{n-1}N^1+\underbrace{\binom{n}{2}(-\mathrm{Id})^{n-2}N^2}_{\text{inutile car } N^2=0}.\quad (N^3=0)$$

$$=\dots$$

Exo 4.7 $A=\begin{pmatrix}\lambda&a&b\\0&\mu&c\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ $\lambda\neq\mu$. coeff dans $\mathbb{C}$.

1) $\chi_A=(X-\lambda)^2(X-\mu)$

λ mult alg 2
μ mult alg 1 $\Rightarrow$ mult géom est aussi 1.

2) À quelle condition la matrice A est diagonalisable?
A diagonalisable
$\Leftrightarrow$ Les mult. alg. sont égales aux mult. géom

$\iff \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda Id)) = 2$

$\iff \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & \mu-\lambda & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$

$\iff \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & \mu-\lambda & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ $\to$ $\neq 0$ par hyp donc matrice non nulle.

$\iff \begin{pmatrix} a \\ \mu-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix} a & b \\ \mu-\lambda & c \end{vmatrix} = 0$

$\iff \boxed{ac - b(\mu-\lambda) = 0}$

(et alors la matrice diagonale est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$)

3) Réduction de Jordan de f ?

$\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$ si f diagonalisable (que des blocs de taille 1)

ou

$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & \\ \hline & & \mu \end{array}\right)$ si f pas diagonalisable.

Exo. 5.8

1) $u : \mathbb{K}^{10} \to \mathbb{K}^{10}$

$\begin{cases} u^3 = 0 \\ \mathrm{rg}(u^2) = 2 \\ \mathrm{rg}(u) = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \dim \mathrm{Ker}\, u^3 = 10 \\ \dim \mathrm{Ker}\, u^2 = 8 \\ \dim \mathrm{Ker}\, u = 5. \end{array}$

Écrire la matrice de la réduction de Jordan de u.

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}$

<u>Rem 3.3</u> On peut trouver la taille des blocs à partir des rangs de la puissance de u.

<u>Rem 3.7.2</u> Idem à partir des dimensions dans la suite des noyaux itérés. $\underset{u^0}{0} < \underset{u^1}{5} < \underset{u^2}{8} < \underset{u^3}{10} = \underset{u^3}{10} = 10 \dots$

$\hookrightarrow$ ceci donne la taille des blocs, mais pas intuitif.

$u^3 = 0$ dit que les blocs de Jordan sont de taille maximale 3.

(0) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$rg(u^2) = 2$.
$\Rightarrow$ il y a 2 blocs de taille 3

$rg(u) = 5$.
$\Rightarrow$ il y a $5-4 = 1$ blocs de taille 2

(un bloc de taille 2 contribue pour 1 au rang de u)

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&&&&&&&\\
&0&1&&&&&&&\\
&&0&&&&&&&\\
&&&0&1&0&&&&\\
&&&&0&1&&&&\\
&&&&&0&&&&\\
&&&&&&0&1&&\\
&&&&&&&0&&\\
&&&&&&&&0&\\
&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

(p.37) Le nombre de blocs de Jordan de taille i est
$2\dim(\operatorname{Ker} f^i) - \dim \operatorname{Ker}(f^{i+1}) - \dim \operatorname{Ker} f^{i-1}$.

<u>Ex</u> : $i = 2$ $\quad 2 \times 8 - 10 - 5 = 1$.

2) Existe $u : k^{10} \to k^{10}$ tq $u^4 = 0$ $rg\, u^3 = 2$ $rg\, u^2 = 2$ $rg(u) = 5$?
Si oui, Jordan ?

<u>NON</u> $u^4 = 0$ et $rg\, u^3 = 2$ donnent 2 blocs de taille 4.

<u>Méthode 1</u>

$$u \sim \begin{pmatrix}
0&1&&&&&&&\\
&0&1&&&&&&\\
&&0&1&&&&&\\
&&&0&&&&&\\
&&&&0&1&&&\\
&&&&&0&1&&\\
&&&&&&0&1&\\
&&&&&&&0&\\
&&&&&&&&\boxed{\begin{matrix}?\\ \text{taille } 2\times 2\end{matrix}}
\end{pmatrix}
\qquad
u^2 \sim \begin{pmatrix}
&&1&0&&&&&\\
&0&&1&&&&&\\
&&&&&&&&\\
&&&&&&1&0&\\
&&&&&0&&1&\\
&&&&&&&&\\
&&&&&&&&?
\end{pmatrix}$$

$rg\, u^2 \geq 4$.
Contradic.

Méthode 2 On applique les formule de Rem 3.7 et on a des valeurs négatives. (pour $i=2$)

Méthode 3 Suite des noyaux itérés

$\operatorname{Ker} u^0 \subset \operatorname{Ker} u^1 \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u^3 \subset \operatorname{Ker} u^4$

$\{0\}$ dim = 5 dim = 8 dim = 8 $E = \mathbb{K}^{10}$

pas d'inégalité stricte.

Exo 5.9 A matrice 4×4.

1) $\chi_A = (X-2)^2(X+1)^2$ (nécessite un peu de calculs)

Donc les v.p sont 2 et -1, de mult. alg. 2.

2) Suite des noyaux itérés pour $\lambda = 2$ et $\lambda = -1$?

Rem pour f diag et λ v.p, $\underbrace{\operatorname{Ker}(f-\lambda Id)^0}_{=\{0\}} \subsetneq \underbrace{\operatorname{Ker}(f-\lambda Id)}_{=E_\lambda} = \dots$

$\operatorname{Ker}(A-2Id)^0$ dim $=0$ | $\operatorname{Ker}(A-2Id)^1$ dim ≥ 1 | $\operatorname{Ker}(A-2Id)^2$ dim ≥ 2 et même égal 2 | $\operatorname{Ker}(A-2Id)^3$ dim $=2$

$\operatorname{Ker}(A+Id)^0$ dim $=0$ | $\operatorname{Ker}(A+Id)^1$ dim ≥ 1. | $\operatorname{Ker}(A+Id)^2$ dim ≥ 2 et même égal 2 | $\operatorname{Ker}(A+Id)^3$ dim $=2$

on trouve dim = max car ~~la~~ 2 en puissance est déjà la mult. alg.

D'où 2 cas seulement pour chaque suite de noyaux itérés : dim 0, puis 1 puis 2 et stat.
ou dim 0, puis 2 et stat.

Calculs explicites :

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & -1 & \\ \cdot & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \cdot \\ & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Pour $A_2 = A - 2\,\mathrm{Id}$,

on a $\underbrace{e_2 + e_3}_{= v_1} \in \mathrm{Ker}\, A - 2\,\mathrm{Id}$, et même $\mathrm{Ker} = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$

immédiat — plus de calcul.

On doit chercher ensuite v_2 un vecteur non colinéaire à $e_2 + e_3$ dans $\mathrm{Ker}\,(A - 2\,\mathrm{Id})^2$.

Par exemple v_2 peut être choisi comme étant e_4.

$\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est donc l'espace caractéristique pour la v.p 2.

Bloc(s) de Jordan et base associée pour cet espace caractéristique.

→ À ce stade du calcul, la suite des noyaux itérés est en terme de dim $0 < 1 < 2$ (notamment mult alg $\neq$ mult géom) et la réduction de Jordan sur l'espace caractéristique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1^e rem. Le choix d'un vecteur complétant v_1 en une base de l'espace caract. ne donne forcément une base pour la réduc de Jordan (on arrive à $\begin{pmatrix} 2 & \neq 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$).

Ici, par hasard, le choix $v_2 = e_4$ convient directement.

La méthode consiste donc ici à choisir des bases pour la suite des noyaux itérés en y allant de gauche à droite.

2^e rem : La preuve du cours pour la réduction de Jordan est dans l'autre sens, moins agréable en pratique.

On calculait tous les $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id})^k$, puis on cherchait des vecteurs $\mathrm{Ker}\,(A - 2\,\mathrm{Id})^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id})^1$ puis des vecteurs dans $\mathrm{Ker}\,(A - 2\,\mathrm{Id})^1$ ...

Peu utilisable sur les exemples.

Conseil : Faire les calculs pour cet exo.
Un corrigé rédigé sera donné dans quelques jours