

Algèbre, semaine 5, 12/02/2021

Questions sur le cours ?

- Frobenius (utilisation d'espaces cycliques)
- Jordan \leftarrow 2 façons de gérer le fait qu'une
- Dunford \leftarrow matrice ne soit pas diagonalisable

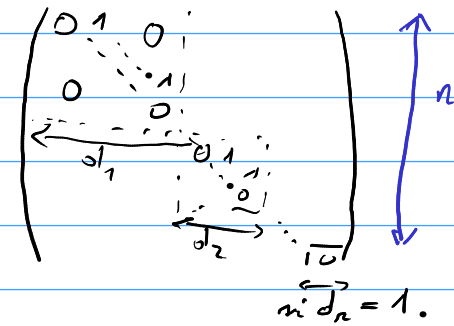
Exos 4.1 (p. 38 et suite), 4.5, 4.6, 4.7, 4.8

4.1 E dim finie $\dim E = n$

f endomorphisme s'écrit par blocs J_{d_1}, \dots, J_{d_r} ($d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Ker } f = 1$



on a r blocs de Jordan

Ici 0 est la seule valeur propre.

3 notions de multiplicité :

* "géométrique" $\dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ ici pour $\lambda = 0$

Dans l'exemple : $m(0) = r = \text{nombre de blocs}$ (image de dim = $n - r$)

* en tant que racine de χ_f
 $m_\chi(0) = n$ car $\chi_f = X^n$.

* en tant que racine de μ_f
 $m_\mu(0) = d_1 =$ taille du plus gros bloc de Jordan.

Ex: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 = 0$

car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$

Exo 4.5 (et suite)

Dunford: [Si μ_f scindé, $\exists!$ (d, n) endomorphismes
 (Th 2.6 p.33) $f = d + n$, d diagonalisable, n nilpotente, d et n commutent.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

* Pour A, 1) A est-elle diagonalisable? ou nilpotente? NON et NON
 $A = \underbrace{Id}_{\text{diag.}} + \underbrace{J_2}_{\text{nilpot.}}$ ces 2 termes commutent.
 → c'est la décomposition de Dunford.
 (on a unicité de la décomp.)

* Pour B, B est diagonalisable.
 $B = B + 0$ est la décomposition de Dunford.

* Pour C, C n'est pas diagonalisable. (cf. v.p $\lambda=1$)
Tests $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}}_D \text{ diag.} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \text{ nilp.}$ mais $DN \neq ND$ (cf. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
 Ce n'est pas la décomp. de Dunford.

\hookrightarrow v.p. uniquement 1 et 2, de mult algébrique resp 2 et 1.
 $\lambda=1$ est de mult géométrique ($\dim \ker(f - Id) = 2$)
 $\lambda=2$ vérifie $\dim \ker(f - 2Id) \geq 1$ (donc égal à 1)
 Pour les 2 v.p., on a mult alg = mult géom. Donc diagonalisable

il faut 0 pour être diagonalisable
 $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp.}}$ mais $DN \neq ND$.

Si on veut D triang. sup., la diag vaut $(1, 1, 2)$

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp.}}$$

On cherche à trouver a et b tq
 $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, système 2×2 ,
 avec une unique solution $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

Rem : Dans le démo du cours, on obtient d et n sont des polynômes en f .
 Donc si est dans une certaine base triang. sup., alors d et n sont aussi triang. sup. (d'où chaque D sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ conduisant forcément à la solution.)

Cherche aussi le 4.6 (la matrice diagonalisable associée se trouve)
 \rightarrow Reprise à 3h45.

Exo 4.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (X+1)^3$

v.p. de A : une seule qui est -1 de mult. géom. ? ≥ 1 calcul pas nécessaire...
 mult alg 3

Q: A diagonalisable?

NON

Par l'absurde, si A est diagonalisable, $\dim(\text{Ker}(A + \text{Id})) = 3$
donc $\dim(\text{Im}(A + \text{Id})) = 0$
donc $A + \text{Id} = 0$
donc $A = -\text{Id}$.

(En général si f a une unique valeur propre, alors on a l'équivalence)
 f diagonalisable. $\Leftrightarrow f = \lambda \text{Id}$.

Notre raisonnement ici montre que dans Dunford, la matrice D est forcément $-\text{Id}$.

le th. de Dunford assure sans calcul que N nilpotente et $DN = ND$

La matrice N est donc $A - D = A + \text{Id}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

N de rang 1
 $\dim \text{Ker } N = 2$
 \downarrow noyaux itérés (cf. TD2)
 $\dim \text{Ker } N^2 > 2 \Rightarrow N^2 = 0$

Pour calculer A^n , on peut utiliser le binôme de Newton.
(Car D et N commutent).

$$A^n = (D + N)^n = (-\text{Id} + N)^n \quad \text{Indice de nilpotence de } N: \leq 3 \text{ (car } \dim E = 3)$$

$$= (-\text{Id})^n + n(-\text{Id})^{n-1}N + \binom{n}{2}(-\text{Id})^{n-2}N^2 \quad (N^3 = 0)$$

inutile car $N^2 = 0$.

Exo 4.7 $A = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \mu & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq \mu. \quad \text{coeff dans } \mathbb{C}.$

1) $\chi_A = (X - \lambda)^2 (X - \mu)$ λ mult alg 2
 μ mult alg 1 \Rightarrow mult géom est aussi 1.

2) À quelle condition la matrice A est diagonalisable?

A diagonalisable
 \Leftrightarrow Les mult. alg. sont égales aux mult. géom

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})) = 2$$

$$\Leftrightarrow \dim \left(\text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & \mu - \lambda & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & \mu - \lambda & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{array}{l} \neq 0 \text{ par hyp} \\ \text{donc matrice non nulle.} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ \mu - \lambda \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ \mu - \lambda & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ac - b(\mu - \lambda) = 0}$$

(et alors la matrice diagonale est
 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$)

3) Réduction de Jordan de f ?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

si f diagonalisable
(que des blocs de taille 1)

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

si f pas diagonalisable.

Exo. 5.8

$$1) u: \mathbb{K}^{10} \rightarrow \mathbb{K}^{10}$$

$$\begin{cases} u^3 = 0 \\ \text{rg}(u^2) = 2 \\ \text{rg}(u) = 5 \end{cases}$$

$$\dim \text{Ker } u^3 = 10$$

$$\dim \text{Ker } u^2 = 8$$

$$\dim \text{Ker } u = 5$$

Écrire la matrice de la réduction de Jordan de u .

Rem 3.3 On peut trouver la taille des blocs à partir de rangs de la puissance de u .

Rem 3.7.2 Idem à partir des dimensions dans la suite des noyaux itérés.

$$0 < \overset{u_0}{5} < \overset{u_1}{8} < \overset{u_2}{10} = \overset{u_3}{10} = \overset{u_4}{10} \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

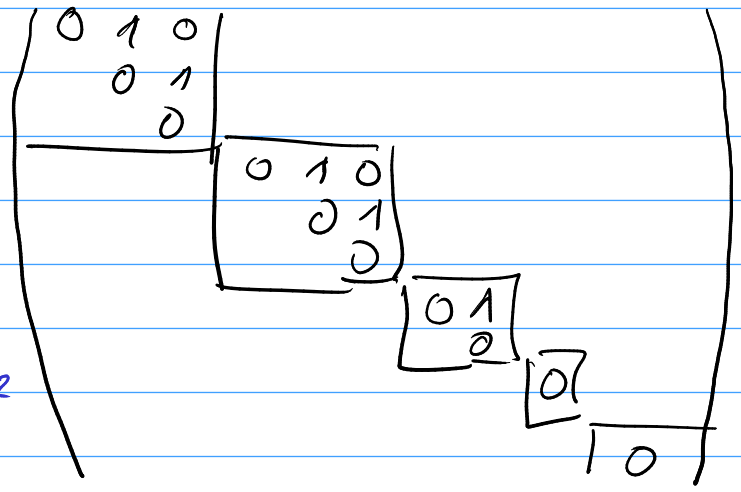
→ ceci donne la taille des blocs, mais pas intuitif.

$u^3 = 0$ dit que les blocs de Jordan sont de taille maximale 3.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(u^2) = 2$
 ⇒ il y a 2 blocs de taille 3

$\text{rg}(u) = 5$
 ⇒ il y a $5 - 4 = 1$ bloc de taille 2
 (un bloc de taille 2 contribue pour 1 au rang de u)

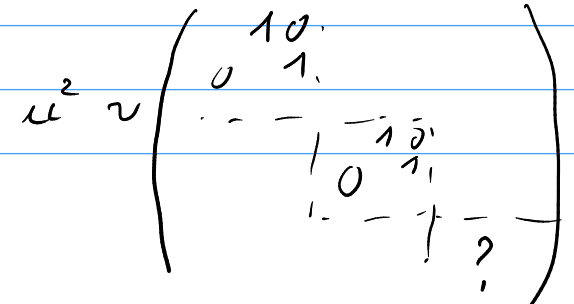
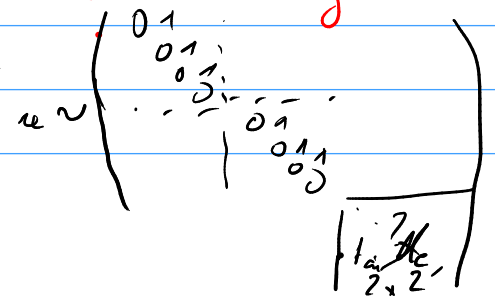


(p. 37) Le nombre de blocs de Jordan de taille i est $2 \dim(\text{Ker } f^i) - \dim \text{Ker } (f^{i+1}) - \dim \text{Ker } f^{i-1}$.
 Ex: $i = 2$ $2 \times 8 - 10 - 5 = 1$.

2) Existe $u : k^{10} \rightarrow k^{10}$ tq $u^4 = 0$ $\text{rg } u^3 = 2$ $\text{rg } u^2 = 2$ $\text{rg } u = 3$?
 Si oui, Jordan?

NON
 Méthode 1

$u^4 = 0$ et $\text{rg } u^3 = 2$ donnent 2 blocs de taille 4.



$\text{rg } u^2 \geq 4$
 Contradict.

Méthode 2 On applique la formule de Rem 3.7 et on a des valeurs négatives. (pour $i=2$)

Méthode 3

Suite des noyaux itérés

$$\text{Ker } u^0 \subset \text{Ker } u^1 \subset \text{Ker } u^2 \subset \text{Ker } u^3 \subset \text{Ker } u^4$$

$\{0\}$

$$\dim = 5$$

$$\dim = 8$$

$$\dim = 8$$

$$E = K^{10}$$

pas d'inégalité stricte.

Exo 5.9

A matrice 4×4 .

1) $\chi_A = (X-2)^2 (X+1)^2$ (nécessite un peu de calculs)

Donc les v.p sont 2 et -1, de mult. alg. 2.

2) Suite des noyaux itérés pour $\lambda=2$ et $\lambda=-1$?

Rem pour f diag et l.v.p,
 $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^0 \neq \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) = \dots$
 $= \{0\}$ $= E_\lambda$

$$\text{Ker}(A - 2\text{Id})^0$$

$\dim = 0$

$$\text{Ker}(A - 2\text{Id})^1$$

$\dim \geq 1$

$$\text{Ker}(A - 2\text{Id})^2$$

$\dim \geq 2$
et même égal 2

$$\text{Ker}(A - 2\text{Id})^3$$

$\dim = 2$

$$\text{Ker}(A + \text{Id})^0$$

$\dim = 0$

$$\text{Ker}(A + \text{Id})^1$$

$\dim \geq 1$

$$\text{Ker}(A + \text{Id})^2$$

$\dim \geq 2$
et même égal 2

$$\text{Ker}(A + \text{Id})^3$$

$\dim = 2$

on trouve $\dim = \max$
car la 2 en puissance
est déjà la mult. alg.

D'où 2 cas seulement pour chaque suite de noyaux itérés : $\dim 0$, puis 1 puis 2 et stat.
ou $\dim 0$, puis 2 et stat.

Calculs explicites :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $A_2 = A - 2I_d$,

on a $\underline{e_2 + e_3} \in \text{Ker } A - 2I_d$, et même $\text{Ker } A = \text{Vect}(e_2 + e_3)$
 $= v_1$ \uparrow immédiat \uparrow plus de calcul.

On doit chercher ensuite v_2 un vecteur non colinéaire à $e_2 + e_3$ dans $\text{Ker}(A - 2I_d)^2$.

Par exemple v_2 peut être choisi comme étant e_4 .

$\text{Vect}(v_1, v_2)$ est donc l'espace caractéristique pour la v.p. 2.

Block de Jordan et base associée pour cet espace caractéristique.

\rightarrow il a stade du calcul, la suite des noyaux itérés est en terme de dim $0 < 1 < 2$ (notamment mult alg \neq mult géom) et la réduction de Jordan sur l'espace caractéristique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1^{er} rem. Le choix d'un vecteur complétant v_1 en une base de l'espace caract. ne donne forcément une base pour la réduction de Jordan (on aurait pu à $\begin{pmatrix} 2 & \neq 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$).

Ici, par hasard, le choix $v_2 = e_4$ convient directement. La méthode consiste donc ici à choisir des bases pour la suite des noyaux itérés en y allant de gauche à droite.

2^{er} rem. La preuve du cours pour la réduction de Jordan est dans l'autre sens, moins agréable à pyratique.

On calculerait tout le $\text{Ker}(A - \lambda I_d)^k$, puis on chercherait les vecteurs $\text{Ker}(A - 2I_d)^2$, $\text{Ker}(A - 2I_d)^1$ puis de vecteurs dans $\text{Ker}(A - 2I_d)^1$...

Peu utilisable sur les exemples.

Conseil : Faire les calculs pour cet exo.
Un corrigé rédigé sera donné dans quelques jours