Algèbre linéaire, TD2, 22/11/2021

Exo 4.3 E $\mathbb{K}$ ev f projection de E

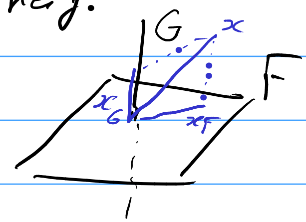
Mq un sev V est stable par f ssi il est somme directe d'un sev de $\mathrm{Ker}\, f$ et d'un sev de $\mathrm{Im}\, f$

Rappel : f projection $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $f^2 = f$. (càd $X(X-1)$ annule f)

Prop $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$

et f correspond (géométriquement) à projection sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$.

Déf alternative
$$\begin{cases} E = F \oplus G \\ x = x_F + x_G \quad \text{déc unique} \\ \text{proj sur } F \text{ parallèlement à } G : \ p_{F,G} : x \mapsto x_F. \end{cases}$$



$\mathrm{Ker}\, p_{F,G} = G \qquad \mathrm{Im}\, p_{F,G} = F \qquad p_{F,G}^2 = p_{F,G}$

Rappel f symétrie $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $f^2 = id$ ($X^2 - 1$ annule f)

Sens $\Rightarrow$ Soit V stable par f. Mq $V = (\text{sev de } \mathrm{Ker}\, f) \oplus (\text{sev de } \mathrm{Im}\, f)$

$x \in V$

$$x = x_F + x_G = \underbrace{(x - f(x))}_{\substack{\in \mathrm{Ker}\, f \\ \text{et } \in V}} + \underbrace{f(x)}_{\substack{\in \mathrm{Im}\, f \\ \text{et } \in V}} \Big\} \text{ car } V \text{ stable par } f.$$

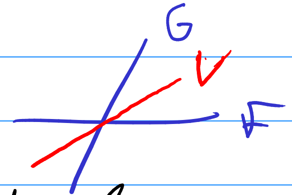
Alors $x \in (\mathrm{Ker}\, f \cap V) + (\mathrm{Im}\, f \cap V)$

Donc $V \subset ((\mathrm{Ker}\, f) \cap V) \oplus (\mathrm{Im}\, f) \cap V)$

Réciproquement, tout terme de l'ensemble de droite est dans V, donc on a $V = \underbrace{((\ker f) \cap V)}_{\text{sev de } \ker f} \oplus \underbrace{((\mathrm{Im} f) \cap V)}_{\text{sev de } \mathrm{Im} f}$.

Rem * Si $E = F \oplus G$, alors V n'est pas forcément $(F \cap V) \oplus (G \cap V)$.

$E = \mathbb{R}^2$



$F \cap V = G \cap V = \{0\}$
ne permet pas d'arriver à V par la somme.

* Comme V stable par f, on a la restriction $f_{|V} : V \to V$.
Si f est un projecteur, alors $f_{|V}$ l'est aussi.
Donc $V = \ker f_{|V} \oplus \mathrm{Im}\, f_{|V}$, ce qui donne la bonne décomposition.

Sens $\Leftarrow$ V sev de E
tq $V = (\text{sev de } \ker f) \oplus (\text{sev de } \mathrm{Im} f) = V_1 \oplus V_2$
Mq V stable par f
Si $x \in V$, disons $x = \underset{\in V_1}{x_1} + \underset{\in V_2}{x_2}$,
alors $f(x) = f(x_2) = x_2 \in V_2 \subset V$.
Donc V stable par f.

$x_2 \in \mathrm{Im} f$
$x_2 = f(v)$
$f(x_2) = f(f(v)) = f(v) = x_2$

Rem $P = X(X-1)$ avec $P_1 = X$ et $P_2 = X - 1$ premiers entre eux.
$\ker P_1(f) = \ker f$
$\ker P_2(f) = \ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im} f$.

4.4 Endomorphismes nilpotents

1) Mq $(\ker(f^j))_{j \in \mathbb{N}}$ suite croissante de sev (au sens de l'inclusion) et s'il existe k tq $\ker f^k = \ker f^{k+1}$, alors $\forall j \geq k$, $\ker f^j = \ker f^k$

(ie stationnaire dès la première égalité)

* Suite croissante ?

$\forall j \in \mathbb{N}, \ker(f^j) \subseteq \ker(f^{j+1})$

Soit $j \in \mathbb{N}$, soit $x \in \ker(f^j)$. $f^{j+1}(x) = \begin{cases} f(f^j(x)) = f(0) = 0 \\ f^j(f(x)) \text{ correcte mais inutile} \end{cases}$

* Supp qu'il existe k tq $\ker f^k = \ker f^{k+1}$.

Mq $\forall j \geq k$, $\ker f^j = \ker f^k$.

1er cas $j = k+2$

Mq $\ker f^{k+2} = \ker f^{k+1}$. $\supseteq$ vrai par croissance

Réciproquement, soit $x \in \ker f^{k+2}$

$0 = f^{k+2}(x) = f(f^{k+1}(x))$ (donc $f^{k+1}(x) \in \ker f$)

$= f^{k+1}(f(x))$ donc $f(x) \in \ker f^{k+1} = \ker f^k$.

$\Leftrightarrow f^k(f(x)) = 0$

Donc $x \in \ker f^{k+1}$.

Cas général : * Ecrire une récurrence à partir du raisonnement ci-dessus.

* Si $j \geq k+2$, on peut écrire $j = k+1+i$ avec $i \geq 1$.

alors pour mq $\ker f^j = \ker f^{k+1}$, on peut écrire

pour $x \in \ker f^j$, $0 = f^{k+1+i}(x)$ $\quad \ker f^k = \ker f^{k+1}$

$= f^{k+1}(f^i(x)) = f^k(f^i(x))$

Donc $x \in \ker f^{k+i}$, càd $x \in \ker f^{j-1}$, et donc on est descendu d'un cran dans la suite des noyaux.

Donc la suite croissante des $(\mathrm{Ker}(f^j))_{j\in\mathbb{N}}$ est stationnaire dès la 1e égalité.

2) On suppose la suite stationnaire avec p le plus petit j tq $\mathrm{Ker}\, f^j = \mathrm{Ker}\, f^{j+1}$

Mq $\dim(\mathrm{Ker}\, f^j) \geq j$ pour $0 \leq j \leq p$.

Pour $0 \leq j \leq p$, on a $\mathrm{Ker}(f^j) \subset \mathrm{Ker}(f^p)$.

$$\{0\} = \mathrm{Ker}\, f^0 \subseteq \mathrm{Ker}\, f^1 \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2 \subseteq \mathrm{Ker}\, f^3 \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ker}\, f^p \underbrace{= \dots = \dots = \dots}_{\text{partie stationnaire}}$$

La q.1 montre que ces inclusions sont strictes.

Donc la dimension augmente au moins de 1 à chaque rang de la suite (jusqu'au rang p) (tant que $\dim \mathrm{Ker}\, f^j$ est finie)

On peut maintenant faire une récurrence évidente pour $0 \leq j \leq p$.

3) On suppose f nilpotent d'indice d (càd $f^d = 0$ et $f^{d-1} \neq 0$)

Mq $(\mathrm{Ker}(f^j))_{j\in\mathbb{N}}$ stationnaire et que d est le plus petit entier tq on a égalité $\mathrm{Ker}\, f^j = \mathrm{Ker}\, f^{j+1}$.

4) Supp E est de dim finie, f nilpotent.

Mq $\exists$ base de E où f est triang sup stricte.

Abs : si $k < d-1$ et $f^k = 0$, alors $f^{k+1} = 0$, $f^{k+2} = 0$, $\vdots$ $f^{d-1} = 0$ contradiction

Pause jusqu'à 10h25. Réfléchir à 3 et à 4.

f nilpotent d'indice d $\Longleftrightarrow$

3) $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\ f^{d-1} \subsetneq E \\ \mathrm{Ker}\ f^{d} = E \end{array}}$ (car $f^{d-1} \neq 0$) $\mathrm{Ker}\ f^{d-1} \subsetneq \mathrm{Ker}\ f^d$.

car $f^d = 0$.

stationnaire $\left| \begin{array}{l} \mathrm{Ker}\ f^{d+1} = E \\ \mathrm{Ker}\ f^{j} = E \end{array} \right.$ et pour $j \geq d$, $f^j = 0$.

et on a bien (par q 1) que d est le plus petit j tq $\mathrm{Ker}\ f^j = \mathrm{Ker}\ f^{j+1}$

4) Supp dim E finie et f nilpotent d'indice d. $\Longleftrightarrow$ le polynôme minimal de f est X^d.

Mq $\exists$ base de E tq la matrice de f est triang. sup. stricte.

Plusieurs méthodes : * $\exists x \in E$ tq $f^{d-1}(x) \neq 0$. ($x \in \mathrm{Ker}\ f^d \setminus \mathrm{Ker}\ f^{d-1}$)

$\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{d-1}(x))$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rem $\left[\begin{array}{l} (id, f, f^2, \dots, f^{d-1}) \text{ famille dans } \mathbb{K}[f] \\ \text{libre et il y a } d \text{ vecteurs de } \mathbb{K}[f] \text{ qui est de dimension } d. \\ \text{Donc } (id, f, f^2, \dots f^{d-1}) \text{ base de } \mathbb{K}[f] \end{array} \right.$

$\mathcal{F}' = (f^{d-1}(x), \dots, f(x), x)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}'}(f_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

De même, montrons que $\mathcal{F}$ est libre.

Supp qu'il existe des λ_i tq $\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i f^i(x) = 0$

Si on applique f^{d-1} à cette égalité, on obtient $\lambda_0 \underbrace{f^{d-1}(x)}_{\neq 0} = 0$

Donc $\lambda_0 = 0$

Puis on applique f^{d-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$, etc ...

Posons $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ de dimension $d \leq n = \dim E$.

F stable par f.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f_{|F})$ est triang sup stricte.

Idée : On complète en une base de E.

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

On veut compléter de telle sorte que A soit triang sup stricte.

Q : Peut-on trouver G supplémentaire de F qui soit stable par f ?
(si oui, on raisonne de même sur $f_{|G}$ qui est encore nilpotent)
<u>OUI</u> prop 3.1 du cours (semaine prochaine)

<u>Autre méthode</u> $*$ $0 \subsetneq \mathrm{Ker}\, f \subsetneq \mathrm{Ker}\, f^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Ker}\, f^d = E$.

On choisit $e_1, \dots, e_k$ base de $\mathrm{Ker}\, f$ $(k \geq 1)$

on ajoute au moins un vecteur à chaque fois

qu'on complète en $e_{k+1}, \dots, e_{k+?}$ base de $\mathrm{Ker}\, f^2$

qu'on complète $\dots$ base de $\mathrm{Ker}\, f^3$

On obtient $\mathcal{B}$ = base de $(\mathrm{Ker}\, f^d = E)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l}]\,\mathrm{Ker}\, f \\ ]\,\mathrm{Ker}\, f^2 \\ ]\,\mathrm{Ker}\, f^3 \end{array}$$

On a une matrice triang sup stricte.

$*$ Critère de trigonalisation :
f trigon $\Leftrightarrow$ polynôme caractéristique de f est scindé.

Ici f nilpotent donne que son polynôme carac est X^n, et donc f trigonalisable avec des 0 sur la diag.

Q5 On a E de dim n et f nilpotent d'indice $n = \dim E$.

Mq $\forall\, 0 \leq i \leq n$, $\dim \operatorname{Ker}(f^i) = i$.

2 méthodes : * comme avant, $\exists x$ tq $f^{n-1}(x) \neq 0$

et on considère $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$

libre et ici base de E.

Pour $1 \leq i \leq n$, une base de $\operatorname{Ker} f^i$ est $(f^{n-1}(x), \dots, f^{n-i}(x))$.

Et donc $\operatorname{Ker} f^i$ est de dim i.

* $0 \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Ker} f^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} f^n = E$ de dim n.

On a vu $\dim \operatorname{Ker}(f^j) \geq j$ pour $0 \leq j \leq n$.

Pour mq $\dim \operatorname{Ker}(f^j) \leq j$, raisonnons par l'absurde.

Supp qu'il existe j tq $\dim \operatorname{Ker}(f^j) > j$, alors

$\dim \operatorname{Ker}(f^{j+1}) \geq 1 + \dim(\operatorname{Ker} f^j) \geq j+2$.

Par une récurrence finie, on aurait $\dim \operatorname{Ker}(f^{n-1}) \geq n$,

contradiction avec $\operatorname{Ker} f^{n-1} \neq E$.

Donc toutes les inégalités larges sont des égalités.

Rem $\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ pour une base bien choisie

même $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

pas diagonalisable (sauf si $n=1$)

Exo 4.5 f nilpotent d'indice de nilpotence d et $d = \dim E$.

On a vu

$$\{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker f^d = E$$

On veut mq que ces $d+1$ sont les seuls sev stables par f.

Soit F stable par f.

1. On peut considérer $f_{|F}$.
   On sait que $f^d = 0$, donc $(f_{|F})^d = 0$.
   Donc $f_{|F}$ nilpotent d'indice $\leq d$. On appelle k cet indice.

2. Mq $F \cap \ker(f^k) = \ker(f_{|F}^k) = F$

   On a $F \cap \ker f^k \subseteq F$

   et $\ker(f_{|F}^k) \subseteq F$.

   $f_{|F}^k : F \to F$ est 0_F. Donc $\ker(f_{|F}^k) = F$.

   Mq $F \subseteq \ker f^k$

   Soit $x \in F$.

   $$f^k(x) \underset{\substack{F \text{ stable par } f \\ \text{et } x \in F}}{=} f_{|F}^k(x) = 0. \qquad \text{Donc } x \in \ker(f^k)$$

   Mq $F \subseteq \ker(f^k)$ déjà fait.

3. Mq $\underbrace{\dim(\ker(f^k)) = k}$ et $\dim(\ker(f_{|F}^k)) \geq k$

↳ exo précédent
* Pour f nilpotent, $\dim \mathrm{Ker}(f^j) \geq j$ pour tout $j \leq$ indice (q 2)
* Pour f nilpotent où indice nilpotence $= \dim E$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f^j)) = j$ (q 5)

* On a les bonnes hypothèses pour appliquer la q.5 de l'exo précédent.
D'où $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) = k$.
* Pour $f_{|F}$ nilpotent d'indice k, on applique la q.2 de l'exo précédent et $\dim(\mathrm{Ker}(f_{|F}^k)) \geq k$.

4. Mq $F = \mathrm{Ker}(f^k)$.
On a vu que $F \underset{q.2}{\in} \mathrm{Ker}(f^k)$ $\overbrace{\text{de dim } k}^{q.3}$.
On a vu que $F \underset{q.2}{=} \mathrm{Ker}(f_{|F}^k)$ de $\underbrace{\dim \geq k}_{q.3}$.

Donc $F = \mathrm{Ker}\, f^k$.
On a donc montré que tout sous-espace stable est un $\mathrm{Ker}(f^k)$.