TD Algèbre, 29 janvier, 3e séance, exos du chapitre 2

Exo 5.1 (page 29) E dim finie $f : E \to E$.

But : Mq deg du polynôme minimal de f est majoré par la dim E

Preuve 1 : $\exists x \in E$ tq $\mu_{f,x} = \mu_f$ (Prop 1.11 chap 2)

$* \deg \mu_{f,x} = \dim E_{f,x}$ (s-espace cyclique)

$\leq \dim E.$

Preuve 2 : On peut utiliser χ_f polynôme caractéristique

$\deg(\chi_f) = \dim E$ (par déf)

et $\mu_f \mid \chi_f$ (Th de Cayley-Hamilton)

ceci implique $\deg(\mu_f) \leq \deg(\chi_f)$.

Rem $\mu_f = \chi_f \iff f$ cyclique (Prop 2.5)

Exo 5.2

$$\det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots \; 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{matrice compagnon}} - X I_n \right) \; ?$$

Rq - ça vaut $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ ($(-1)^n$ à ajouter !)

$$\begin{vmatrix} -X & & & & a_0 \\ 1 & -X & & 0 & a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -X & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$$

Idée : * dvt suivant la 1e colonne (+ récurrence ?)

* dvt suivant la 1e ligne (+ récurrence ?)
* dvt suivant la dernière colonne

→ Faire les calculs
Reprise à 9h15.

Rem : * Ces matrices compagnon apparaissent comme matrices d'endomorphismes cycliques (p18 et 19).

* Ces matrices peuvent apparaître comme blocs dans la décomp. de Frobenius.

Calcul 1 : dvt suivant la 1e ligne :

$$\underbrace{(-X)\begin{vmatrix} -X & & a_1 \\ 1 & -X & a_2 \\ & 1 & \vdots \\ & \ddots & \end{vmatrix}}_{\text{calculable par récurrence.}} + (-1)^{n+1} a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -X & 0 \\ & \ddots & -X \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}}_{=1}$$

pour l'étape de récurrence.

taille 2×2 : $\begin{vmatrix} -X & a_0 \\ 1 & a_1 - X \end{vmatrix} = (-X)^2 - Xa_1 - a_0$
$= X^2 - \sum_{i=0}^{2-1} a_i X^i$

pour l'initialisation à $n=2$

Détails à compléter...

Pour à $n=1$, la matrice compagnon est (a_0)
$\det((a_0 - XI_1)) = -X + a_0$

Récurrence sur $n \geq 2$.

$P(n)$: $\det(A - XI_n) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right)$

- Init à $n=2$: vu ci-dessus.
- On suppose que pour un n fixé, $P(n)$ est vrai.
  Montrons $P(n+1)$.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -X & & & a_0 \\ 1 & -X & & \vdots \\ & 1 & & a_{n-1} \\ & & \ddots \; 1 & a_n - X \end{vmatrix}}_{\text{dét. de taille } (n+1)\times(n+1)} \underset{\text{dvt 1e ligne}}{=} (-X) \underbrace{\begin{vmatrix} -X & & a_1 \\ 1 & -X & \vdots \\ & 1 & a_{n-1} \\ & & a_n - X \end{vmatrix}}_{\text{Hyp de réc.}} + (-1)^{n+1+1} a_0$$

$$= (-X)(-1)^n\left(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i\right) + (-1)^{n+1}(-a_0)$$

$$= (-1)^{n+1} X^{n+1} + (-1)^{n+1}\left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^{i+1}\right) + (-1)^{n+1}\underbrace{(-a_0)}_{k=0}$$

$k = i+1$

$$= (-1)^{n+1}\left(X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$$

__Calcul 2 :__

$$\begin{vmatrix} -X & & & & & & a_0 \\ 1 & -X & & 0 & & & a_1 \\ & 1 & -X & & & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & 0 & & \vdots \\ & 0 & & 1 & -X & & a_{n-2} \\ & & & 0 & 1 & & a_{n-1}-X \end{vmatrix} \quad (\text{taille } n \times n)$$

$$= (a_{n-1} - X)\underbrace{\begin{vmatrix} -X & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix}}_{\text{taille } n-1} - a_{n-2}\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -X & & 0 \\ 1 & -X & \\ 0 & 1 & -X \end{matrix}}^{\text{taille } n-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ a_{n-3}\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -X & 0 \\ 1 & \ddots \\ 0 & 1 \; -X \end{matrix}}^{\text{taille } n-3} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -X \\ & 1 \end{matrix}}_{\text{taille } 2} \end{vmatrix}$$

$$- \cdots$$

$$= (-X)^n + \underbrace{a_{n-1}(-X)^{n-1}}_{k=n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} a_{n-i} \begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -X & \\ 1 & \ddots \\ & 1 \; -X \end{matrix}}^{\text{taille } n-i} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -X \\ & \ddots \\ & 1 \end{matrix}}_{\text{taille } i-1} \end{vmatrix}$$

$= (-X)^{n-i} \times 1 \cdots$

$= (-X)^{n-i}$

$$= (-1)^n X^n - (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$ $k = n-i$, $0 \leq k \leq n-2$

$(-1)^{i-1}(-X)^{n-i} = -(-1)^n X^{n-i}$
$= -(-1)^n X^k$

Rem : On a pu calculer facilement les déterminants par blocs.

Exo 5.3 Autre preuve du th. de Cayley-Hamilton.

Matrices à coeff dans $\mathbb{K}[X]$
anneau intègre, mais pas un corps.

Rappel : déterminant peut être défini :

* La forme multilinéaire alternée valant 1 sur la matrice identité.

$$\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{\text{isomorphe à } M_n(\mathbb{K})} \longrightarrow \mathbb{K}$$

(Cette définition nécessite que $\mathbb{K}$ soit un corps)

* $\det((a_{ij})) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ (fonctionne sur un anneau commutatif)
* développements par rapport à ligne ou colonne (———)

Si M est à coeff dans un anneau A (commutatif et intègre), on peut calculer $\det M$ via la 2^e ou 3^e déf.
(ex : calcul du polynôme carac)

Autre méthode : passage par le corps des fractions.

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathrm{Frac}(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}(X)$$

$\chi_M = \det(M - XI_n)$

1. $\underline{\text{Mq}}$ $\chi_M = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{K}$.
2. $\underline{\text{Mq}}$ $\exists M_0, \dots, M_{n-1} \in M_n(\mathbb{K})$ tq ${}^t\mathrm{Com}(M - XI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i X^i$

3. $\underline{\text{Mq}}$ $\det(M - XI_n) = \dots$

$\underline{\text{Indice}}$: souvenir du lien entre comatrice et déterminant.

$\underline{\text{Reprise à 11h}}$

1. On calcule un déterminant dans $\mathbb{K}[X]$.
2. $$\underbrace{{}^t\mathrm{Com}(M - XI_n)}_{\in M_n(\mathbb{K}[X])} \qquad \underbrace{\sum_{i=0}^{n} M_i X^i}_{\in (M_n(\mathbb{K}))[X] \underset{\text{isom}}{\simeq} M_n(\mathbb{K}[X])} \quad \text{où } M_i \in M_n(\mathbb{K})$$

${}^t\mathrm{Com}(M - XI_n)$ est une matrice dont les coeff se calculent par des déterminants de taille $n-1$ de sous-matrices de $M - XI_n$. Ces coeff sont des polynômes de degré $\leq n-1$.

Donc ${}^t\mathrm{Com}(M - XI_n) \in M_n(\mathbb{K}[X]_{\leq n-1}) \simeq (M_n(\mathbb{K}))[X]_{\leq n-1}$

Donc $\exists M_0, \dots, M_{n-1} \in M_n(\mathbb{K})$ tq ${}^t\mathrm{Com}(M - XI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i X^i$.

3. Mq $\underbrace{\det(M - XI_n)}_{\in \mathbb{K}[X]} I_n = \underbrace{MM_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(MM_i - M_{i-1})X^i - M_{n-1}X^n}_{\in M_n(\mathbb{K})[X] \simeq M_n(\mathbb{K}[X])}$.

Rappel $\left[\begin{array}{l} \det(A) I_n = A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A \\ \text{On applique ceci à } A = M - XI_n. \end{array}\right.$ vrai sur un anneau commutatif.

$$\det(M - XI_n) I_n = (M - XI_n)\,{}^t\mathrm{Com}(M - XI_n)$$

$$= (M - XI_n)\left(\sum_{i=0}^{n-1} M_i X^i\right)$$

$$= \dots$$

$$= MM_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(MM_i - M_{i-1})X^i - M_{n-1}X^n$$

permet une 2e expression où on observe que $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$ $MM_i = M_iM$

4. Conclure : $\det(M - XI_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ (q. 1)

Par identification dans $(M_n(\mathbb{K}))[X]$, on a :

$$\begin{cases} MM_0 = a_0 I_n \\ MM_i - M_{i-1} = a_i I_n \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ -M_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$

donc M_{n-1} commute avec M.

Calculons $\chi_M(M) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i M^i$

$$= M M_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (M M_i - M_{i-1}) M^i - M_{n-1} M^n$$

$$= M M_0 + M M_1 M - M_0 M + M M_2 M^2 - M_1 M^2 + \dots + M M_{n-1} M^{n-1} - M_{n-2} M^{n-1} - M_{n-1} M^n$$

par commutativité des M_i avec M

$$= 0$$

Donc χ_M est un polynôme annulateur de M.

Exo 3.4 p.22

F et G de dim finie

$u \in \mathcal{L}(F)$, $v \in \mathcal{L}(G)$

Mq : S'il existe une base $\mathcal{B}$ de F tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{C}}(v)$, et une base $\mathcal{C}$ de G

alors $\exists\, \varphi : F \to G$ isomorphisme tq $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$.

Rem : • Si en plus $F = G$, on dit que u et v sont semblables.

• On a équivalence entre les 2 expressions.

Obs : Pour $F = G$, on peut utiliser une matrice de passage et son isomorphisme associé.

Disons $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{C} = (g_1, \dots, g_n)$

Prenons φ défini par $\varphi(f_i) = g_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

φ isomorphisme car on envoie une base sur une base.

Mq $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "v"] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & F \end{tikzcd}$$

2 méthodes : * Raisonner matriciellement

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1})$$

$$= \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)}_{= I_n} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u)}_{\underset{\text{hyp.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v)} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi^{-1})}_{= I_n}$$

* Raisonner sur la base $\mathcal{C}$.

Comparer $v(g_i)$ avec $\varphi \circ u \circ \underbrace{\varphi^{-1}(g_i)}_{= f_i}$

On trouve la même expression car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$

[Pour la semaine prochaine, lire le §4.1 du cours.
réduction avec un algorithme à comprendre.