Algèbre linéaire, semaine 4

Facteurs invariants et algorithme

<u>Rappel</u> $\mathbb{K}$ un corps, M une matrice de taille $p \times q$ de rang r.
Alors M s'écrit PXQ avec $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$
$Q \in GL_q(\mathbb{K})$

avec r fois le nombre 1.

(car $f : E \to F$, de rang r, il existe une base $(e_1, \ldots, e_q)$ de E
et une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F tq $f(e_i) = f_i$ pour $i \leq r$
et $f(e_i) = 0$ pour $i > r$)

Pour un anneau (unitaire et comm.) euclidien (principal peut suffire)

<u>Prop 4.14</u> A anneau euclidien, M une matrice de taille $p \times q$ à coeff dans A
et de rang r quand M est vue à coeff dans $\mathbb{K} = \operatorname{Frac} A$.
Alors $M = PXQ$ où $P \in GL_p(A)$ et $X = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_r & 0 \end{pmatrix}$
$Q \in GL_q(A)$

et $a_1 | a_2 | \ldots | a_r$.

<u>Rem</u> : Inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$?
Il y a $+I_n$ et $-I_n$, et toutes les matrices dont le déterminant vaut $\underbrace{+1 \text{ ou } -1}_{\text{inversible dans } \mathbb{Z}}$.

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pas inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est son inverse dans $M_n(\mathbb{Z})$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Prop (milieu de la p.25)

$M \in M_n(A)$ inversible $\iff$ $\det M$ inversible dans A.

Idée $\quad {}^t\mathrm{Com}\, M \cdot M = \det M \, I_n$

Notamment les matrices de permutation et les $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ sont inversibles.

Rem : Les $a_1, \dots, a_r$ sont uniques à inversibles près.

Rem : Dans la réduction de Frobenius, apparaissent
(Th 3.5) des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ $\quad P_r | P_{r-1} | \dots | P_1$
et notamment $\mu_f = P_1$.
(Rem 3.7) et $\chi_f = P_1 . P_2 \dots P_r$.

Algorithme : p. 26-27 à coeff dans un anneau euclidien

But à partir d'une matrice M, effectuer des opérations sur les lignes ou colonnes pour se ramener à $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ où $a_1 | a_2 | \dots | a_r$. déf : ce sont les facteurs invariants (uniques à inversible près)

Idée : Essayer de se ramener à $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où a_1 divise tout coeff dans la partie $*$.

(Ex : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'a pas la forme voulue car 2 ne divise pas 3.)

via des divisions euclidiennes.

Notation • φ le stathme de A ($\varphi : A\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ qui sert à la condition sur le reste dans la division)

Rem : Si $A = \mathbb{K}$ corps, $\mathbb{K}/_{(a)} = \{*\}$ singleton
où $a \neq 0$.
$b = qa + 0$. $(q = \frac{b}{a} \in \mathbb{K})$

Ex Dans $\mathbb{Z}$, on prend la valeur absolue
Dans $\mathbb{K}[X]$, on prend le degré.

• Pour une matrice $M = (a_{ij})$, on appelle $\delta(M) = \min_{i,j} \varphi(a_{ij})$.

1e étape : Par manipulation élémentaires, on construit une nouvelle matrice X tq $\delta(X) = \varphi(x_{11})$

$(A = \mathbb{Z})$ Ex : $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\delta(M) = 1$

$X = M.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de permutation associée à la transposition } (12)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $\delta(X) = \varphi(x_{11})$

$M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2e étape Si x_{11} ne divise pas (tous les éléments de la 1e ligne et tous les éléments de la 1e colonne),

on effectue des divisions euclidiennes sur les lignes/colonnes de la matrice puis on met le reste obtenu en haut à gauche.

$A = \mathbb{Z}$. Ex $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ $3 = 1 \times 2 + 1$

$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 1 \times C_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{permut.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

On effectue ceci un nombre fini de fois jusqu'à obtenir x_{11} qui divise toute la 1e ligne et toute la 1e colonne.
Ensuite, par division par x_{11}, on se ramène à $\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

3e étape : - Si x_{11} divise tous les coeffs du bloc $*$, on applique l'algo au bloc $*$.

(3b) - Sinon, $\exists\, x_{ij}$ tq $x_{11} \nmid x_{ij}$, càd $x_{ij} = q x_{11} + r \quad 0 < \delta(r) < \delta(x_{11})$
Via une opération sur les lignes ($L_1 \leftarrow L_1 + L_i$), on met x_{ij} sur la 1e ligne puis on réapplique l'étape 2.

Ex : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 - C_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{perm.}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{mult par } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ inv dans } M_n(\mathbb{Z})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

a_1, a_2 ; a_1, a_2'

Rem : Quand on applique la partie (3b) de l'algo une fois, on n'est pas garanti d'obtenir x_{11} qui divise le bloc $(*)$ de taille $p-1 \times q-1$, mais au bout d'un nombre fini d'applications de (3b), on obtient un x_{11} qui divise tout le bloc $*$.
↳ car diminution stricte du stathme.

Pause et chercher les 2 premières du S. 4.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & 27 \end{pmatrix}$

À 10h50, reprise et correction.

Exo 5.4 $\quad A = \mathbb{Z}$ $\quad$ stathme = valeur absolue

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2-2C_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2-2L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{exemple}]{\text{vu en}} \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 6 \end{pmatrix}$$

$6\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 12 & -27 \\ 69 & -153 \end{pmatrix}$$

$-27 = -3 \times 12 + 9$

$$\xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1]{} \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 69 & 54 \end{pmatrix}$$

$-153 + \underbrace{3 \times 69}_{207} = 54$

$$\xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 54 & 69 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 - C_1]{} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 54 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 15 & 54 \end{pmatrix}$$

$54 - 3 \times 15 = 9$

$$\xrightarrow[C_2 - 3C_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 - 5L_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3 et 9 facteurs invariants

Rem : On peut trouver explicitement les matrices P et Q qui relient $\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Pour la matrice 3x3 du 5.4, après calculs, on trouve 1, 2 et 16 comme facteurs invariants

Exo 5.5 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de matrice $\begin{pmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = M.$

On veut les invariants de similitude de f, μ_f et χ_f

$X\,Id - M$ matrice à coeff dans $\mathbb{K}[X]$ anneau euclidien.

$(\text{Frac } \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}(X))$

$$A = \begin{pmatrix} X-17 & 8 & 12 & -14 \\ -46 & X+22 & 35 & -41 \\ 2 & -1 & X-4 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & X-3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}[X]$
stathme : deg du polyn.

rang $A = 4 - \dim \text{Ker} = 4$ (vu dans $M_n(\mathbb{K}(X))$)

$\dim \text{Ker } A = 0$, (car comb lin ~~de coeff~~ à coeff dans $\mathbb{K}(X)$ induit une comb lin à coeff dans $\mathbb{K}[X]$)

<u>1e étape</u> : on veut un polynôme de degré 0 en haut à gauche.
On choisit de mettre -1 en haut à gauche

$$A \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & X-4 & 4 \\ X+22 & -46 & 35 & -41 \\ 8 & X-17 & 12 & -14 \\ -2 & -4 & 2 & X-3 \end{pmatrix}$$

$35 + (4-X)(X+22)$

$$\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + (4-X)C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 4C_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ X+22 & 2X-2 & X^2+18X-53 & 4X+47 \\ 8 & X-1 & 8X-20 & 18 \\ -2 & 0 & 2X-6 & X+5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (X+22)L_1 \\ L_3 \leftarrow \cdots \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{\text{comb. de lignes}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2X-2 & X^2+18X-53 & 4X+47 \\ 0 & X-1 & 8X-20 & 18 \\ 0 & 0 & 2X-6 & X+5 \end{pmatrix}$$

-1 divise (dans $\mathbb{R}[X]$) tout le bloc restant

18 : unique élément de degré minimal

0 : ne peut pas être utilisé dans l'algo.

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_4}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 8X-20 & X-1 \\ 0 & 4X+47 & X^2+18X-53 & 2X-2 \\ 0 & X+5 & 2X-6 & 0 \end{pmatrix}$$

$8X-20 = 18\,\dfrac{4X-10}{9}$

$X-1 = 18\,\dfrac{X-1}{18}$

$$\xrightarrow[\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2\frac{4X-10}{9} \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2\frac{X-1}{18}}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 4X+47 & -\frac{7}{9}(X-1)^2 & -\frac{1}{18}\cdots \\ 0 & X+5 & -\frac{1}{9}(4X^2-8X+4) & -\frac{1}{18}\cdots \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}[X]$, les inversibles sont les polynômes constants non nuls.
→ permettre de se débarrasser de scalaires

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7(X-1)^2 & (X-1)(4X+11) \\ 0 & 0 & 4(X-1)^2 & (X-1)(X+5) \end{pmatrix}$$

le stathme vaut 2 sur les coeffs du bloc 2×2
On passe à l'étape 2 de l'algo sur le bloc 2×2.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7(X-1)^2 & 15(X-1) \\ 0 & 0 & 4(X-1)^2 & -\frac{3}{7}(X-1)(3X-17) \end{pmatrix}$$

le degré 1.

On divise $(X-1)(4X+11)$ par $(X-1)^2$.
Ceci vaut $(X-1)\,r$ où r est le reste de la div de $4X+11$ par $X-1$.
$4X+11 = 4(X-1) + \underbrace{15}_{r}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ & & (X-1) & \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix}$$

$(X-1)^2(X+1)$ après calcul.

$P_2 = X-1$
$P_1 = (X-1)^2(X+1) = \mu_f = (X^2-2X+1)(X+1) = X^3 - X^2 - X + 1$
et $\chi_f = (X-1)^3(X+1)$.

Th 3.5 À P_1, on associe un espace E_1 de dim 3
et à P_2, on associe un espace E_2 de dim 1.

$E = \mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$ (ss-ep stables)
avec $f_{|E_i}$ de polynôme minimal P_i. (E_i cycliques)

La forme de Frobenius de f est

matrice compagnon

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

Rem : Pour trouver explicitement une base, c'est plus compliqué.
Il faut un vecteur cyclique pour E_1, cf. prop 1.11 (partie 2)