Chap. 3

Exercice 4.2

1. (i) $\Rightarrow$ (ii)

On suppose que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ est simultanément diagonalisable. Donc, par définition, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq les matrices $M_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i)$, $1\leq i\leq n$, soient diagonales.
Comme deux matrices diagonales commutent, on a : $\forall\ 1\leq i,j\leq N, \quad M_i M_j = M_j M_i$
et donc : $\forall\ 1\leq i,j\leq N, \quad f_i f_j = f_j f_i$, puisque les M_i st les matrices de f_i, $1\leq i\leq N$, ds la <u>même</u> base $\mathcal{B}$.

2.

2.1 Soient $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ tq $f\circ g = g\circ f$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ et posons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
On veut mq $g(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$. Soit $x \in E_\lambda$.
Par déf., on a $f(x) = \lambda x$. Il s'ensuit que :
$$f(g(x)) = f\circ g(x) = g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$
Donc $g(x) \in E_\lambda$.
Ceci montre que $g(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

2.2 On va démontrer, par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

pour tout e.v. E de dimension finie et toute famille $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ d'endo. de E, si les f_i, $1 \leq i \leq N$, sont diag. et commutent 2 à 2 alors la famille $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ est simultanément diagonalisable.

Lorsque $N=1$, le résultat est immédiat (puisque la famille est constituée d'un seul endo.).

<u>Induction</u> : supposons que N est un élt de $\mathbb{N}^*$ tq la pté soit vraie à l'ordre N. On considère une ~~famille~~ un e.v. E de dim. finie et une famille $(f_i)_{1\leq i\leq N+1}$ d'endo. de E, qui comm. 2 à 2 et sont tous diagonalisables. Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(f_{N+1})$ on pose $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f_{N+1} - \lambda\, id_E)$. Comme f_{N+1} commute avec tous les f_i, $1 \leq i \leq N$, la question 2.1 assure que E_λ est stable par les f_i, $1 \leq i \leq N$. Et, comme f_{N+1} est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f_{N+1})} E_\lambda . \qquad (*)$$

Fixons $\lambda \in \mathrm{Spec}(f_{N+1})$. On veut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille des endo. induits par les f_i, $1 \leq i \leq N$, sur E_λ.

Pour $1 \leq i \leq N+1$, notons $\tilde{f}_i$ l'endo. de E_λ induit par f_i.

Comme les f_i, $1 \leq i \leq N$, commutent 2 à 2, il en est de même des $\tilde{f}_i$. De plus, la Remarque 1.15 du Chap. 3 assure que les $\tilde{f}_i$, $1 \leq i \leq N$, sont diagonalisables. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à $(\tilde{f}_i)_{1 \leq i \leq N}$ et assure qu'il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ constituée de vecteurs propres pour tous les $\tilde{f}_i$, $1 \leq i \leq N$. Comme de plus f_{N+1} induit sur E_λ une homothétie de rapport λ, $\mathcal{B}_\lambda$ est aussi une famille de vect. propres pour $\tilde{f}_{N+1}$. Il s'ensuit que les vecteurs de $\mathcal{B}_\lambda$ sont des vect. propres pour les f_i, $1 \leq i \leq N+1$.

Considérons alors $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f_{N+1})} \mathcal{B}_\lambda$. D'après $(*)$, $\mathcal{B}$ est une base de E et, d'après ce qui précède, elle est constituée de vecteurs propres de tous les f_i, $1 \leq i \leq N+1$. En d'autres termes : $(f_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ est simultanément diagonalisable.

Ceci termine la dém. par récurrence.