Chapitre 3 $\boxed{\text{Exercice 4.4}}$

On supp. que $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

1. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Puisque f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure. On peut alors calculer χ_f grâce à T :

$$\chi_f = (-1)^n \det(T - X I_n) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[X])$$

Comme T est triangulaire sup., $T - XI_n$ l'est aussi et χ_f est bien produit de facteurs de degré 1.

2. On $\stackrel{\sim}{c}$ $u : E \to E$
et on supp. que son polyn. caract. χ_u est scindé.

2.1.1. Comme χ_u est scindé et de degré $n \geq 1$, il admet une racine et cette racine est une v.p. de u.

2.1.2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Par déf. $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ donc, par le théo. du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})) = n - \dim(\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E))$$
$$\leq n - 1.$$

2.1.3. On note p la dimension de $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$. La question 2.1.2. assure que $0 \leq p \leq n-1$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$.
On peut compléter la famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
Posons $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Alors H est un hyperplan de E et, comme $p \leq n-1$, il contient $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$.

Soit maintenant (H un hyperplan qui contient $\mathrm{Im}(u-\lambda id_E)$ et soit) $x \in H$. On a :

$$u(x) = \underbrace{u(x) - \lambda x}_{\in\, \mathrm{Im}(u - \lambda id_E)} + \underbrace{\lambda x}_{\in\, H}$$

Donc, comme $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E) \subseteq H$, on a $u(x) \in H$. En concl. : $u(H) \subseteq H$.

2.1.4. On a montré ci-dessus qu'il existe un hyperplan H de E tq

1/ $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E) \subseteq H$

2/ $u(H) \subseteq H$.

Si $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H et si e_n est un vecteur tq $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a que

$\forall\, 1 \leq i \leq n-1 \qquad u(e_i) \in H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$

et $u(e_n) = \underbrace{(u - \lambda id)\, e_n}_{\in\, H} + \lambda e_n$

Ceci mq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$

pour des scalaires a_{ij} adéquats.

2.1.5. Soit H et $\mathcal{B}$ comme ci-dessus. On a

$$\chi_u = (-1)^n \det(A - X I_n)$$

$$= (-1)^n \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda - X \end{array}\right)$$

$$= (-1)^n (\lambda - X) \cdot \det(B - X I_{n-1})$$

où $B = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ (bloc sup. gauche de la matrice A ci-dessus). Mais, $B = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_{n-1})}(v)$

Donc

$$\chi_u = (-1)^{n-1} (X - \lambda) \det(B - X I_{n-1})$$

$$= (X - \lambda)\, \chi_v .$$

Donc χ_v divise χ_u et, comme χ_u est scindé;

χ_v l'est aussi.

2.1.6. On va mq (ii) ⇒ (i) par récurrence sur n = dim(E).
Lorsque $n = 1$, le résultat est trivial.
Supposons que n est un entier tq le résultat soit vrai à l'ordre n. Montrons qu'alors il l'est nécessairement à l'ordre $n+1$.
Soit E un e.v. de dim. $n+1$ et $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ dont le polyn. caract. est scindé. Les questions 2.1.1 à 2.1.5. montrent que l'on peut choisir une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ de E telle que, si $H = Vect(e_1, \dots, e_n)$,

1/
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

2/ $\lambda \in Spec(f)$

3/ $f(H) \subseteq H$ et $\chi_{f|H}$ soit scindé.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $f|H$. Elle assure qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de H telle que $T = Mat_{\mathcal{B}_0}(f|H)$ soit triang. sup.

Posons $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_0 \sqcup \{e_{n+1}\}$. On obtient facilement que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{1,n+1} \\ & T & & \vdots \\ & & & b_{n,n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

Donc f est trigonalisable. Ceci termine la récurrence.

2.2.1. Voir 2.1.1.

2.2.2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, $0 \neq x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id})$ et $D = \mathbb{K}x$.

2.2.3 Il est clair que $u(D) \subseteq D$. Il s'ensuit qu'il existe un endo. $\tilde{u} : E/D \to E/D$ tq le diag. suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, two heads, "\text{(proj. can.)}", "\pi"'] \arrow[d, "u"'] & E/D \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ E \arrow[r, two heads, "\pi", "\text{(proj. can.)}"'] & E/D \end{tikzcd}$$

<u>Rappel</u> : $\dim_{\mathbb{K}}(E/D) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(D) = n-1$.

2.2.4. On supp. que $\tilde{u}$ est trigonalisable.
Alors, il existe une base $\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_{n-1})$ de E/D telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tilde{u}) \text{ est triang. supérieure.}$$

On rappelle que, si $e_1, \dots, e_{n-1}$ sont des vecteurs de E tels que $b_i = \pi(e_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, alors $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre de E, que l'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ où e_n est un vecteur non nul arbitraire de D.

Soit maintenant $1 \leq j \leq n-1$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tilde{u})$ est triang. sup., on a :

$$\tilde{u}(b_j) \in \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_j).$$

Plus précisément, si $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$, on a

$$\tilde{u}(b_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{ij}\, b_i$$

c.à.d

$$\tilde{u} \circ \pi(e_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{ij}\, \pi(e_j)$$

càd (cf : $\tilde{u} \circ \pi = \pi \circ u$ et linéarité de π)

$$\pi \circ u(e_j) = \pi\left(\sum_{i=1}^{j} t_{ij} e_j\right)$$

càd $\quad u(e_j) - \sum_{i=1}^{j} t_{ij} e_j \in \ker(\pi)$

Mais, $\ker(\pi) = D = \mathbb{k} e_n$.

On a donc mq : $\forall\, 1 \leq j \leq n-1$,

$$u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, e_n)$$

Et, comme $e_n \in D$, on a $u(e_n) = \lambda e_n$.

A ce stade, on a mq la matrice de u la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & \lambda \end{array}\right)$$

Mais, si l'on ordonne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ en plaçant e_n en première position, càd en considérant la base $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})}(u) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

qui est triangulaire sup. Donc u est trigonalisable.

2.2.5. On démontre, par récurrence sur la dim. de E que : si u est un endo. d'un e.v. de dim. n dont le polyn. caract. est scindé, alors u est trigonalisable.

Lorsque $n=1$, le résultat est évident.
Supposons que n est un élt de $\mathbb{N}^*$ pour lequel le résultat est vrai. Considérons un e.v. E de dim. $n+1$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ tq χ_u est scindé.

D'après la question 2.2.1, u admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. ~~D'après la question~~ Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$ et posons $D = \mathbb{K} x$. Soit en outre $\mathcal{B}$ une base de E tq $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ avec $b_1 = x$.

On note $\pi : E \twoheadrightarrow E/D$ la projection canonique et on considère la matrice M de u relativement à $\mathcal{B}$.

<u>Obs. 1 :</u> Il est clair que $(\pi(b_2), \dots, \pi(b_{n+1}))$ est une famille génératrice de E/D et c'est donc une base de E/D puisque $\dim(E/D) = n$.

<u>Obs. 2 :</u> La matrice M est de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & m_{12} & \cdots & m_{1,n+1} \\ \hline 0 & m_{22} & \cdots & m_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n+1,2} & \cdots & m_{n+1,n+1} \end{array}\right)$$

En particulier, si l'on pose $N = (m_{ij})_{2 \leq i,j \leq n+1}$ (càd que N est la matrice extraite $n \times n$ située en bas à ~~gauche~~ droite de M), on a

$$\chi_u = (-1)^{n+1}(1 - X)\det(N - X I_n).$$

On considère maintenant l'endo. $\tilde{u}$ induit par u sur E/D (cf. 2.2.3). On a un diag. comm.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"'] & E/D \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & E/D \end{tikzcd}$$

(cf. 2.2.3).

Par définition de Π, pour $2 \leq j \leq n+1$, on a :

$$u(b_j) = m_{1j}\, b_1 + m_{2j}\, b_2 + \dots + m_{n+1,j}\, b_{n+1}$$

Donc, en appliquant π à cette identité et avec la commutativité du diagramme précédent, il vient : pour $2 \leq j \leq n+1$:

$$\tilde{u} \circ \pi(b_j) = \pi \circ u\,(b_j) = m_{2j}\, \pi(b_2) + \dots + m_{n+1,j}\, \pi(b_{n+1})$$

c-à-d

$$\tilde{u}\left(\pi(b_j)\right) = m_{2j}\, \pi(b_2) + \dots + m_{n+1,j}\, \pi(b_{n+1})$$

Ceci mq la matrice de $\tilde{u}$ ds la base $(\pi(b_2), \dots, \pi(b_{n+1}))$ est N et par conséquent, l'identité précédente $\chi_u = (-1)^{n+1}(\lambda - X)\det(N - XI_n)$ devient $\chi_u = (X-\lambda)\chi_{\tilde{u}}$. Ce dont on déduit que $\chi_{\tilde{u}}$ est scindé puisque χ_u l'est. Par hypothèse de récurrence, $\tilde{u}$ est donc trigonalisable et la question 2.2.4 assure que u est trigonalisable. La prop. est donc vraie à l'ordre $n+1$. La récurrence est terminée.