Correction exercice 4.9, avec calculs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrice de $u : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4)

1. On développe $\det(A - X\,\mathrm{Id})$ par rapport à la dernière ligne, et on trouve $\chi_A = (X-2)^2(X+1)^2$.

2. À ce stade, on a donc 2 et -1 valeurs propres, donc au moins un vecteur propre pour chaque, et un espace propre de dimension 1 ou 2.
On a forcément aussi $\mathrm{Ker}((u-\lambda\,\mathrm{id})^2)$ de dimension 2 (p.ex par les propriétés de la suite des noyaux).
<u>Pour $\lambda = 2$,</u> on a $A - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où clairement $e_2 + e_3$ est dans le noyau.

$$\text{et} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Donc $A - 2\,\mathrm{Id}$ de rang 3, donc $\dim \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id}) = 1$
et $\mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$

$$(A-2\,Id)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & -9 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ où e_4 est clairement dans le noyau. (et e_2+e_3 le reste)

inutile par la remarque au début de la question. $\longrightarrow$ $(A-2\,Id)^2$ a ses 2 premières colonnes indépendantes, donc son rang est ≥ 2.

D'où $rg = 2$ et $\mathrm{Ker}\left((A-2\,Id)^2\right) = \mathrm{Vect}\,(e_4, e_2+e_3)$.

<u>Pour $\lambda=-1$</u> on a $$A+Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ où e_1+e_3 est dans le noyau.

et $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, donc son rang est $\geqslant 3$.

D'où $\mathrm{Ker}\, A+Id = \mathrm{Vect}\,(e_1+e_3)$

$$(A+Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ où e_2 est dans le noyau.

D'où $\mathrm{Ker}\left((A+Id)^2\right) = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_1+e_3)$.

<u>Rem</u> : $\mathrm{Ker}\,(A+Id)^2$ et $\mathrm{Ker}\,(A-2\,Id)^2$ étant en somme directe, on a notamment $(e_2+e_3, e_4, e_1+e_3, e_2)$ forme une base $\mathcal{B}$.

3) Dans cette base $\mathcal{B}$, on a que u s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ des complexes non nuls.}$$

Il reste à vérifier si les choix de e_4 et e_2 donnent bien $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ ou s'il faut les changer.

(<u>Rem</u> : Il y avait un choix à scalaire près pour les vecteurs propres e_2+e_3 et e_1+e_3, mais pour le 2^e vecteur, on a complété un vecteur en une base d'un sev de dim 2, il y a un large degré de liberté.)

Calculons
$$u(e_4) = e_2 + e_3 + 2e_4 \qquad \text{d'où } \alpha = 1$$
$$u(e_2) = e_1 + e_3 - e_2 \qquad \text{d'où } \beta = 1.$$

Donc $\mathcal{B}$ est bien une base de E pour laquelle la matrice de u est sous forme de Jordan.

<u>Rem</u> : Une autre façon de faire pour trouver une base de Jordan facilement est de chercher les v.p. (donc e_2+e_3, e_1+e_3 ici) puis de chercher v et w tq
$u(v) = 2v + e_2 + e_3$, ie résoudre $(A - 2Id)(v) = e_2 + e_3$
et $u(w) = -w + e_1 + e_3$, ie résoudre $(A + Id)(w) = e_1 + e_3$.
Ceci évite les calculs de $(A-2Id)^2$ et $(A+Id)^2$.

<u>Rem</u> : La preuve du cours donne aussi une méthode, mais moins utilisable en pratique, en redescendant la suite des noyaux :
P.ex ici, on cherche $v_1 \in Ker(A-2Id)^2 \setminus Ker(A-2Id)$ (d'où un bloc $\begin{pmatrix} \cdots & 1\neq 0 \\ \cdots & 2 \end{pmatrix}$), puis $f(v_1) = v_2 \in Ker\, A - 2Id$ (d'où un bloc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$)