Cohomologie de Hochschild des produits croisés II (d'après Anno, Halbout-Tang)

Patrick Le Meur

2 février 2009

Soit X une variété affine lisse sur $\mathbb{C}$ et sur laquelle agit un groupe fini G. Dans cette séance, nous nous intéressons à la cohomologie de Hochschild $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G)$ du produit croisé $\mathbb{C}[X] \rtimes G$. L'algèbre de cohomologie de Hochschild $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X])$ (pour le cup-produit) peut être décrite de la manière suivante ([2, 4]) :

$$\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X]) \simeq \bigoplus_{i \geqslant 0} \Gamma(X, \Lambda^i TX)$$

où le produit à droite est donné par le produit extérieur, et il est naturel de demander si un résultat similaire existe pour X/G. Cependant, l'espace topoloqique X/G n'est pas nécessairement une variété lisse. C'est la raison pour laquelle nous étudions $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G)$ (rappelons que, dans certains cas, $\mathbb{C}[X]^G$ et $\mathbb{C}[X] \rtimes G$ sont Morita équivalentes).

En 2004, Neumaier, Pflaum, Posthuma et Tang démontrèrent ([5]) la décomposition suivante de l'espace vectoriel gradué $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G)$:

$$\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G) \simeq \bigoplus_{g \in G, m} \Gamma\left(X, \Lambda^{*-l(g,m)} TX_m^g \otimes \Lambda^{l(g,m)} N_X X^g\right)^G$$

où, pour chaque $g \in G$, l'entier $m = 1, \ldots$ est tel que les X_m^g sont les composantes du sous-espace X^g des points fixes sous g, l'entier $l(g,m)$ est la codimension de X_m^g dans X et $N_X X_m^g$ est le faisceau normal. En 2005, Anno décrivit ([1]) le produit dans $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G)$ en termes de produits extérieurs dans la décomposition ci-dessus. En 2006, Halbout et Tang effectuèrent ([3]) le même travail pour le crochet de Gerstenhaber.

Le but de l'exposé est de comprendre la décomposition ci-dessus de $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G)$ et d'expliquer les démonstrations de Anno d'une part et de Halbout et Tang d'autre part. Si le temps le permet, nous verrons comment ces descriptions permettent de classifier les structures de Poisson non commutatives sur $\mathbb{C}[X] \rtimes G$.

Références

[1] R. Anno. Multiplicative structure on the Hochschild cohomology of crossed product algebras. math.QA/0511396v2, 2005.

[2] A. Caldararu. The Mukai pairing II : the Hochschild-Kostant-Rosenberg isomorphism. *Adv. Math.*, 194(1) :34–66, 2005.

[3] G. Halbout and X. Tang. Noncommutative Poisson structures on orbifolds. math.QA/066436v2, 2006.

[4] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66 :157–216, 2003.

[5] N. Neumaier, M. J. Pflaum, H.B. Posthuma, and X. Tang. Homology of formal deformations of proper étale Lie groupoids. *J. Reine Angew. Math.*, 593 :117–168, 2006.