Résumé : Anneaux de Cohen-Macaulay.

18/05/2000

Resume-Cohen-Macaulay.tex

Introduction

Ce qui suit est standard, pour la présentation j'ai suivi [Pe ; chap 18]. On ne donne aucune preuve pour ces arguments qui seront tous repris en détail plus tard.

Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien dont le corps résiduel $R/\mathfrak{m}$ est noté k. L'idéal $\mathfrak{m}$ est de type fini, on peut donc définir la *dimension de plongement* de R, notée $\mathrm{emb}\dim R$, comme le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une famille à n éléments qui engendre $\mathfrak{m}$ (par convention, si $\mathfrak{m} = 0$, c'est-à-dire si R est un corps, $n = 0$). Comme c'est bien connu, le lemme de Nakayama assure qu'une famille $\{y_1, \ldots, y_p\}$ engendre $\mathfrak{m}$ si et seulement si $\{y_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, y_p + \mathfrak{m}^2\}$ est une famille de générateurs du $R/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On peut même préciser : $\{y_1, \ldots, y_p\}$ est une famille minimale de générateurs de $\mathfrak{m}$ si et seulement si $\{y_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, y_p + \mathfrak{m}^2\}$ est une base du $R/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Joint au théorème de l'idéal principal de Krull (voir 7.2.1) ceci montre que

$$\dim R := \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leq \mathrm{emb}\dim R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Définition – *L'anneau local nothérien* $(R, \mathfrak{m})$ *est dit régulier si* $\dim R = \mathrm{emb}\dim R$*.*

Une caractérisation possible des anneaux locaux réguliers est la suivante.

Proposition – *Un anneau local nothérien* $(R, \mathfrak{m})$ *est régulier si et seulement si son idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *peut être engendré par une suite régulière.*

Il est clair alors d'après 7.3.7 que si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier de dimension n, toute suite régulière qui engendre $\mathfrak{m}$ est constituée de $n = \dim R$ éléments.

Toujours d'après 7.3.7 si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local nothérien de dimension n, la longueur maximale d'une suite régulière contenue dans $\mathfrak{m}$ est n. Alors, on dira que l'anneau local $(R, \mathfrak{m})$ est *Cohen-Macaulay* si il existe dans $\mathfrak{m}$ une suite régulière constituée de n éléments (elle est donc nécéssairement maximale).

Pour un anneau local noethérien, la condition *être Cohen-Macaulay* est donc, en un certain sens, une version affaiblie de la condition *être régulier*. On verra dans la suite que cette condition suffit pour disposer d'un anneau qui se comporte bien du point de vue de la théorie de la dimension.

Convention. Dans tout ce qui suit, tous les anneaux sont supposés noethériens.

1 Suites régulières et profondeur.

1.1 Suites régulières.

Soit R un anneau et M un R-module. Un élément x de R est dit M-régulier si l'homothétie $\mathrm{h}_{M,x}$ de M de rapport x est un R-endomorphisme injectif de M.

Définition 1.1.1 – *Une suite* $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *de* n *éléments de* R *est dite* M*-régulière si*
(i) x_1 *est* M*-régulier et, pour* $2 \leq i \leq n$, x_i *est* $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$*-régulier,*
(ii) $M \neq (x_1, \ldots, x_n)M$.
Une suite qui satisfait à (i) est dite faiblement M*-régulière et un suite* R*-régulière est appelée une suite régulière.*

Notons que, si $(R, \mathfrak{m})$ est local et M de type fini et non nul, une suite faiblement régulière constitué d'éléments de $\mathfrak{m}$ est automatiquement régulière d'après le lemme de Nakayama.

Le premier exemple de suite régulière est la suite des indéterminées $\{X_1, \ldots, X_n\}$ dans un anneau de polynômes $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ (K un anneau).

Lemme 1.1.2 – *Soit* R *un anneau,* M *un* R*-module de type fini et* $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *une suite* M*-régulière. Si* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ *et si* $\mathbf{x} \subseteq \mathfrak{p}$*, alors* $\mathbf{x}/1 = \{x_1/1, \ldots, x_n/1\}$ *est une suite* $M_{\mathfrak{p}}$*-régulière d'éléments de* $R_{\mathfrak{p}}$.

Preuve : D'après [Ma, Theorem 4.5], pour toute partie multiplicative S de R, le foncteur $M \mapsto M_S$ est un foncteur covariant exact de la catégorie des R-modules dans celle des R_S-modules. Il s'ensuit aussitôt que si x est un élément M-régulier de R, $x/1$ est un élément $M_{\mathfrak{p}}$-régulier de $M_{\mathfrak{p}}$ (considérer les homothéties correspondantes). De plus, et toujours d'après l'exactitude du foncteur de localisation, on dispose d'un isomorphisme canonique de $R_{\mathfrak{p}}$-modules entre $M_{\mathfrak{p}}/(x_1/1, \ldots, x_i/1)M_{\mathfrak{p}}$ et $(M/(x_1, \ldots, x_i)M)_{\mathfrak{p}}$, pour $1 \leq i \leq n-1$. De sorte que la $M/(x_1, \ldots, x_i)M$-régularité de x_{i+1} assure la $M_{\mathfrak{p}}/(x_1/1, \ldots, x_i/1)M_{\mathfrak{p}}$-régularité de $x_{i+1}/1$. On en déduit que la suite $\{x_1/1, \ldots, x_n/1\}$ est faiblement $M_{\mathfrak{p}}$-régulière. Puisque $\mathbf{x}/1 \subseteq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, on doit avoir $\mathbf{x}/1 M_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}$ sans quoi, d'après le lemme de Nakayama, on aurait $M_{\mathfrak{p}} = 0$ contrairement aux hypothèses. ∎

1.2 Grade et profondeur.

Soit M un R-module, une suite M-régulière $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (contenue dans un idéal I) est dite maximale (dans I) si pour tout x_{n+1} dans R (dans I), $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ n'est pas M-régulière.

Remarque 1.2.1 – Par ailleurs, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite M-régulière, il est clair que la suite d'idéaux $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n)$ est une suite strictement croissante. Les anneaux considérés étant noethériens, une suite M-régulière (contenue dans I) – qui est finie par définition – peut être complétée en une suite M-régulière maximale (parmi les suites M-réguliers contenues dans I).

À un R-module M de type fini et un idéal I de M (tel que $IM \neq M$), on va associer un invariant numérique appelé profondeur de I sur M. Cet invariant mesure la taille de I en terme de suites M-régulières (constituées d'éléments de I). Pour ce faire, nous allons montrer que, si M et I sont comme ci-dessus, toute les suites M-régulières maximales contenues dans I ont même longueur.

Proposition 1.2.2 – *Soit R un anneau noethérien et M un R-module de type fini. Si I est un idéal dont tous les éléments sont des diviseurs de zéro de M, alors il existe un idéal premier associé $\mathfrak{p}$ de M tel que $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

Preuve : Par hypothèse, I est inclus dans la réunion $\bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}$ (voir 7.1.2). Comme $\operatorname{Ass} M$ est fini (voir 7.1.3), le lemme d'évitement des idéaux premiers permet de conclure. ■

Proposition 1.2.3 –[1] *Soit R une anneau noethérien et M et N deux R-modules de type fini. Alors,* $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$ *si et seulement si* $\operatorname{Ann} N$ *contient un élément M-régulier.*

Preuve : ($\Longleftarrow$) (Notons que pour cette implication, les hypothèses *noethérien* et de type fini sont inutiles.) Soit $f \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$ et $x \in \operatorname{Ann} N$ et M-régulier. Pour tout n dans N, on a $xf(n) = f(xn) = 0$ et donc $f(n) = 0$. On peut présenter ceci par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ 0 = \mathrm{h}_{N,x} \downarrow & & \downarrow \mathrm{h}_{M,x} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}.$$

Puisque $x \in \operatorname{Ann} N$, on a $\mathrm{h}_{N,x} = 0$ et donc $\mathrm{h}_{N,x} \circ f = 0$. Comme x est M-régulier, $\mathrm{h}_{M,x}$ est injective et donc simplifiable à gauche. Il s'ensuit $f = 0$.
($\Longrightarrow$) On procède par contraposée. On suppose que $\operatorname{Ann} N$ est constitué de diviseurs de zéro de M. On sait alors, d'après 1.2.2, qu'il existe un idéal premier associé $\mathfrak{p}$ de M tel que $\operatorname{Ann} N \subseteq \mathfrak{p}$. En particulier, $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\operatorname{Ann} N) = \operatorname{Supp} N$, de sorte que $N_\mathfrak{p} \neq 0$. Le lemme de Nakayama s'applique au $R_\mathfrak{p}$-module de type fni $N_\mathfrak{p}$ et assure que $N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p} \neq 0$. Ainsi, $N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p} \neq 0$ est donc un $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-espace vectoriel non nul et il existe un morphisme surjectif non nul $N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p} \longrightarrow R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ de $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-espace vectoriel qui (bien-sûr) est aussi un morphisme de $R_\mathfrak{p}$-modules. En composant anec la projection naturelle $N_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}$, on obtient un morphisme surjectif non nul de $R_\mathfrak{p}$-modules $N_\mathfrak{p} \xrightarrow{\phi} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. En outre, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Il s'ensuit (voir [Ei ; Theo. 3.1]) que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M_\mathfrak{p}$. Posons alors $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m$, $m \in M_\mathfrak{p}$. Le morphisme de $R_\mathfrak{p}$-module $R_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p}$ défini par $1 \mapsto m$ induit un morphisme injectif et non nul de $R_\mathfrak{p}$-module $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \xrightarrow{\psi} M_\mathfrak{p}$. Ainsi, $\psi \circ \phi$ est élément de $\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$, non nul car ϕ est non nul et ψ injectif. Il reste à utiliser l'isomorphisme canonique $\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Hom}_R(N, M)_\mathfrak{p}$ (voir [Ro ; Theo. 3.84]) pour en conclure que $\operatorname{Hom}_R(N, M) \neq 0$. ■

Lemme 1.2.4 – *Soit R un anneau, M et N deux R-modules et $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite faiblement M-régulière d'éléments de* $\operatorname{Ann} N$*, alors :*

$$\operatorname{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \cong \operatorname{Ext}^n_R(N, M).$$

Preuve : La preuve procède par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est vide. Soit $n \geq 1$ et posons $\mathbf{x}' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. L'hypothèse de récurrence assure que $\operatorname{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_R(N, M)$. De plus, comme x_n est un élément $M/\mathbf{x}'M$-régulier dans $\operatorname{Ann} N$, on a (d'après 1.2.3),

$$\operatorname{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_R(N, M) = 0. \qquad (1)$$

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{h}_{M,x_1}} M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0$$

[1] La proposition 1.2.3 est la clef de voute de cette sous-section. Notons que l'implication $\Longleftarrow$ de cette proposition est utile pour prouver le lemme 1.2.4 tandis que l'implication $\Longrightarrow$ est utile pour prouver le théorème 1.2.6.

induit une suite exacte longue en homologie qui, d'après (1), donne

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}_R^n(N,M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_R^n(N,M).$$

D'après [Ro, Theorem 7.16], φ est l'application induite en homologie par la multiplication par x_1 dans M ou N indifféremment. Autrement dit, $\varphi = R^n\mathrm{Hom}_R(N,.)\mathrm{h}_{M,x_1} = R^n\mathrm{Hom}_R(.,M)\mathrm{h}_{N,x_1}$ (notations de [Ro, Chap.6]). Comme x_1 est dans l'annulateur de N, on a $\mathrm{h}_{N,x_1} = 0$ puis $\varphi = 0$. Ainsi, ψ est un isomorphisme. En utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on obtient que $\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M)$. La proposition s'en déduit. ∎

Remarque 1.2.5 – Soit R un anneau noethérien, M un R-module de type fini et I un idéal de R tel que $IM \neq M$. Dans la suite, on va être amené à considerer l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$. Le théorème 1.2.6 montre que cet ensemble est non vide et caractérise son plus petit élément en termes de suites M-régulières contenues dans I.

Théorème 1.2.6 – *Soit R un anneau, M un R-module de type fini et I un idéal de R tel que $IM \neq M$. L'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$ est non vide et toutes les suites M-régulières maximales dans I ont la même longueur n donnée par :*

$$n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Preuve : Si I ne contient aucun élément M-régulier, alors $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) = \mathrm{Ext}_R^0(R/I, M) \neq 0$ d'après la proposition 1.2.3 et le résultat est prouvé. Dans le cas contraire, soit $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite M-régulière maximale d'éléments de I. Le lemme 1.2.4 et la proposition 1.2.3 assurent que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\ \ \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0.$$

D'autre part, si l'on suppose que $\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) = 0$, d'après 1.2.4, il s'ensuit que $\mathrm{Hom}(R/I, M/\mathbf{x}M) = 0$. D'après 1.2.3, on en déduit l'existence de x_{n+1} dans I tel que $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ soit une suite faiblement M-régulière. Puisque $IM \neq M$, la suite $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ doit être M-régulière, ce qui est une contradiction. ∎

Remarque 1.2.7 –
(i) Soit R un anneau noethérien et N et M deux R-modules de type fini. Si l'on suppose que $(\mathrm{Ann}\, N)M \neq M$, la méthode de la preuve de 1.2.6 s'étend pour montrer que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$ est non vide. En effet, si $\mathrm{Hom}_R(N, M) = \mathrm{Ext}_R^0(N, M) \neq 0$ l'assertion est claire. Sinon, $\mathrm{Hom}_R(N, M) = \mathrm{Ext}_R^0(N, M) = 0$ et $\mathrm{Ann}\, N$ contient un élément M-régulier (cf. 1.2.3). On peut donc considérer $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite M-régulière maximale d'éléments de $\mathrm{Ann}\, N$ (voir 1.2.1). Si l'on suppose $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) = 0$, 1.2.4 montre que $\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) = 0$ ce dont on déduit d'après 1.2.3 qu'il existe $x_{n+1} \in \mathrm{Ann}\, N$ qui soit $M/\mathbf{x}M$-régulier. La suite $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ est alors faiblement M-régulière, et comme elle est composée d'éléments de $\mathrm{Ann}\, N$, l'hypothèse $(\mathrm{Ann}\, N)M \neq M$ assure qu'elle est M-régulière. C'est une contradiction, donc $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \neq 0$.
(ii) Le point (i) ci-dessus s'applique en particulier au cas où $M = R$ et $N \neq 0$. On voit donc que si N est un R-module non nul de type fini, $\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^i(N, R) \neq 0\}$ est non vide.

Définition 1.2.8 – *Soit R un anneau, M un R-module de type fini et I un idéal de M tel que $IM \neq M$. On appelle profondeur de I sur M et on note* prof (I, M) *la longueur de toute suite M-régulière maximale dans I. Ainsi,*

$$\mathrm{prof}\,(I, M) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Dans le cas où $R = (R, \mathfrak{m}, k)$ est un anneau local, on abrège les notations en posant $\operatorname{prof}(\mathfrak{m}, M) := \operatorname{prof} M$ *; ainsi, pour tout R-module non nul*

$$\operatorname{prof}(M) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}.$$

Remarque 1.2.9 – Soit R un anneau, M un R-module et I un idéal de R. Si l'on a $IM = M$, on pose $\operatorname{prof}(I, M) = \infty$. Cette convention est consistante avec le théoreme 1.2.6 en ce sens que, si R est un anneau, M un R-module et I un idéal de R, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\operatorname{prof}(I, M) = \infty$;
(ii) $IM = M$;
(iii) $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$. En effet, l'équivalence entre (i) et (ii) est immédiate d'après la convention faite ci-dessus et le théorème 1.2.6. De plus, supposons $IM = M$; alors si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} R/I = \mathrm{V}(I)$, $I_\mathfrak{p}$ est un idéal propre de l'anneau local $R_\mathfrak{p}$ tel que $I_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$. Le lemme de Nakayama entraine alors que $M_\mathfrak{p} = 0$, et on a montré que $\operatorname{Supp} R/I \cap \operatorname{Supp} M = \emptyset$. Rappelons que, conformément à [Ro, Thorem 9.50], pour tout anneau nothérien R, tout idéal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ et tous R-modules M et N de type fini, on a $\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^i_R(N, M)_\mathfrak{p}$, pour $i \in \mathbb{N}$. On en déduit immédiatement que $\operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \subseteq \operatorname{Supp} R/I \cap \operatorname{Supp} M = \emptyset$. Donc, $\operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) = 0$ (voir [Mat, Theorem 4.6]). On a ainsi montré que (ii) implique (iii). Réciproquement (iii) implique (ii) d'après 1.2.6.

La proposition suivante sera utile.

Proposition 1.2.10 –[2] *Soit R un anneau noethérien, I un idéal de R et $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de R modules de type fini. Alors,*
1. $\operatorname{prof}(I, M_2) \geq \min\{\operatorname{prof}(I, M_1), \operatorname{prof}(I, M_3)\}$ *;*
2. $\operatorname{prof}(I, M_1) \geq \min\{\operatorname{prof}(I, M_2), \operatorname{prof}(I, M_3) + 1\}$ *;*
3. $\operatorname{prof}(I, M_3) \geq \min\{\operatorname{prof}(I, M_1) - 1, \operatorname{prof}(I, M_2)\}$.

Preuve : Admis.[3] ■

On va lier la profondeur à un autre invariant, le grade. Pour ceci, on aura besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.2.11 – *Soit R un anneau, I, J deux idéaux de R et M un R-module de type fini. Alors, :*
(a) $\operatorname{prof}(I, M) = \inf\{\operatorname{prof} M_\mathfrak{p}, \ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}$,
(b) $\operatorname{prof}(I, M) = \operatorname{prof}(\sqrt{I}, M)$ *;*
(c) $\operatorname{prof}(I \cap J, M) = \min\{\operatorname{prof}(I, M), \operatorname{prof}(J, M)\}$ *;*
(d) si N est un R-module de type fini tel que $\operatorname{Supp} N = \mathrm{V}(I)$*, on a :*

$$\operatorname{prof}(I, M) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ext}^i_R(N, M) \neq 0\}.$$

(e) Si $x \in I$ est M-régulier, alors $\operatorname{prof}(I, M/xM) = \operatorname{prof}(I, M) - 1$.

Preuve : (a) Si $IM = M$, on a vu à la remarque 1.2.9 que $\mathrm{V}(I) \cap \operatorname{Supp} M = \emptyset$. Donc, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$, on a $M_\mathfrak{p} = 0$, de sorte que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$. Donc, par définition $\operatorname{prof} M_\mathfrak{p} = \infty$ et on a bien l'égalité voulue. On suppose donc, à présent, que $IM \neq M$. Il est clair par définition que

[2] C'est [BH : 1.2.9]. Voir aussi [Pe ; 16.17].
[3] La preuve est facile ; voir plus tard si elle s'impose.

$\operatorname{prof}(I, M) \leq \operatorname{prof}(\mathfrak{p}, M)$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$. D'autre part, si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite M-régulière dans $\mathfrak{p}$, et si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, 1.1.2 assure que $\operatorname{prof}(\mathfrak{p}, M) \leq \operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}}$. La même inégalité est trivialement vraie pour tout $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} M$. On a donc $\operatorname{prof}(I, M) \leq \inf\{\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{p} \subseteq \mathrm{V}(I)\}$. A présent, soit $\mathbf{x}$ une suite M-régulière maximale dans I. Alors, tout élément de I est un diviseur de zéro de $M/\mathbf{x}M$. Il s'ensuit, d'après 1.2.2, qu'il existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)$ tel que $I \subseteq \mathfrak{p}$. On a bien sûr $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{p}}$ et l'isomorphisme canonique $(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}/1M_{\mathfrak{p}}$ montre que $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}}/(\mathbf{x}/1M_{\mathfrak{p}}))$. Ainsi, tout élément de $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ est un diviseur de zéro de $M_{\mathfrak{p}}/(\mathbf{x}/1M_{\mathfrak{p}})$. De plus, si l'on suppose que $(\mathbf{x}/1)M_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$, il vient $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}M_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$, de sorte que $M_{\mathfrak{p}} = 0$ par le lemme de Nakayama. Mais, ceci contredit le fait que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M) \subseteq \operatorname{Supp}(M/\mathbf{x}M) = \mathrm{V}(\operatorname{Ann}(M/\mathbf{x}M)) \subseteq \mathrm{V}(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M$. De sorte que la suite $\mathbf{x}/1$ est une suite $M_{\mathfrak{p}}$-régulière maximale de $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.
Les points (b) et (c) se déduisent immédiatement de (a).
(d) Puisqu'on suppose que $\operatorname{Supp} N = \mathrm{V}(I)$, on doit avoir $\operatorname{Ann}(N) = \sqrt{I}$. Compte tenu du point (b), on peut donc supposer que $\operatorname{Ann} N = I$. On termine la preuve en copiant celle de 1.2.6 (et les arguments de 1.2.9 pour le cas où $IM = M$) avec R/I remplacé par N.
(e) Si $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite M/xM-régulière d'éléments de I, alors $\{x, x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite M-régulière d'éléments de I. Donc, on a $\operatorname{prof}(I, M/xM) \leq \operatorname{prof}(I, M) - 1$. De plus, puisque x est un élément M-régulier de I, il constitue une suite M-régulière qui peut être complétée en une suite M-régulière maximale $\mathbf{x} = \{x, x_2, \ldots, x_s\}$ (d'éléments de I) de longueur $s = \operatorname{prof}(I, M)$. Il s'ensuit que $\{x_2, \ldots, x_s\}$ est une suite M/xM-régulière et donc que $s - 1 \leq \operatorname{prof}(I, M/xM)$. Donc, $\operatorname{prof}(I, M/xM) \geq \operatorname{prof}(I, M) - 1$. ∎

Remarque 1.2.12 – Il convient de remarquer, a ce stade de l'exposé, qu'en cherchant à définir correctement la notion de profondeur, on a obtenu mieux en fait.
1) Soit M un R-module de type fini et I un idéal e R tel que $IM \neq M$. La profondeur $\operatorname{prof}(I, M)$ de I sur M aurait pu être définie immédiatement comme la longeur maximale d'une suites M-régulières maximales dans I. En fait, on a montré que toutes les suites M-régulières maximales (et il en existe compte tenu du fait que toute suite M-régulière peut être complétée en une suite M-régulière maximal comme on l'a fait remarquer en début de sous-section) ont même longueur (finie).
2) On a montré, en plus, que l'invariant numérique $\operatorname{prof}(I, M)$ se caractérise par un moyen homologique : $\operatorname{prof}(I, M) = \min\{i \in \mathbb{N} \,|\, \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$.

Nous donnons, à présent, la définition de grade d'un module. Il convient de remarquer que, le grade n'est qu'un cas particulier de profondeur où $M = R$ comme le souligne la remarque 1.2.14.

Définition 1.2.13 – *Soit R un anneau et M un R-module de type fini. Si $M \neq 0$, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}$ est non vide (voir 1.2.7 (ii)) ; on appelle grade de M l'entier* $\operatorname{grade}(M) = \inf\{i \in \mathbb{N} \,|\, \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}$. *Si $M = 0$, on pose par définition que le grade de M est ∞ :* $\operatorname{grade}(M) = \infty$.

Remarque 1.2.14 – Soit M un R-module de type fini. D'après 1.2.11, on a :

$$\operatorname{grade}(M) = \operatorname{prof}(\operatorname{Ann} M, R).$$

En particulier, pour tout idéal I de R, on a $\operatorname{grade}(R/I) = \operatorname{prof}(I, R)$.

On va, à présent, lier la profondeur et la dimension d'un module. (Voir les rappels en 7.3.)

Proposition 1.2.15 – [4] *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un R-module non nul, de type fini,* $\operatorname{prof} M \leq \dim M$.

Preuve : Soit $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ une suite M-régulière. D'après 7.3.7, on a $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - r$. Il sensuit que $\dim M \geq r$. ∎

On complète cette étude par une propriété plus forte que la proposition 1.2.15 et qui sera utile plus tard.

Théorème 1.2.16 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et M un R-module non nul, de type fini. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, alors* $\operatorname{prof} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$.

Preuve : [5] On procède par récurrence sur $\operatorname{prof} M$. Lorsque $\operatorname{prof} M$ est nul, il n'y a rien à démontrer.
Si $\operatorname{prof} M > 0$, il existe un élément $x \in \mathfrak{m}$ qui est M-régulier. Étant donné $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, on choisit $m \in M$ tel que Rm soit maximal parmi les sous-modules cycliques de M annulés par $\mathfrak{p}$. Supposons que $m \in xM$. Alors, $m = xm'$, avec $m' \in M$ et $\mathfrak{p}m' = 0$, par M-régularité de x. D'autre part, $Rm' \supset Rm$ (en effet, si on avait $Rm' = Rm$, il existerait $x' \in R$ tel que $m' = x'm$, d'où $(1 - xx')m = 0$, puis $1 - xx' \in \mathfrak{m}$ et enfin $1 \in \mathfrak{m}$ puisque $x \in \mathfrak{m}$). Ainsi, par maximalité de Rm, on doit avoir $m \notin xM$. Comme $\mathfrak{p}m = 0$, on voit que $m + xM$ est un élément non nul de M/xM annulé par $\mathfrak{p}$, de sorte que tout élément de $\mathfrak{p}$ est diviseur de 0 de M/xM. À ce titre, $\mathfrak{p}$ est inclus dans un certain $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M/xM$. Bien sûr, $x \notin \mathfrak{p}$, par suite, $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} M/xM = \mathrm{V}(\operatorname{Ann} M/xM)$. Donc, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

Par ailleurs, d'après le point (e) de 1.2.11, $\operatorname{prof} M/xM = \operatorname{prof} M - 1$. Donc, par hypothèse de récurrence, on a $\operatorname{prof} M - 1 = \operatorname{prof} M/xM \leq \dim R/\mathfrak{q}$. Mais, puisque $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, on a $\dim R/\mathfrak{p} > \dim R/\mathfrak{q} \geq \operatorname{prof} M/xM = \operatorname{prof} M - 1$. ∎

Nous donnons maintenant une version globale de 1.2.15. Rappelons que, si I est un idéal d'un anneau R, par définition, la hauteur de I est l'infimum des hauteurs des idéaux premiers qui contiennent I ([Ma] §5).

Proposition 1.2.17 – *Soit R un anneau, I un idéal de R. Alors,* $\operatorname{grade}(R/I) \leq \operatorname{ht}(I)$.

Preuve : D'après 1.2.14 et 1.2.11, $\operatorname{grade}(R/I) = \operatorname{prof}(\operatorname{Ann} R/I, R) = \operatorname{prof}(I, R) = \inf\{\operatorname{prof} R_\mathfrak{p},\, \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}$. Donc, d'après 1.2.15, $\operatorname{grade}(R/I) \leq \inf\{\dim R_\mathfrak{p},\, \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\} = \inf\{\operatorname{ht} \mathfrak{p},\, \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}$. ∎

1.3 Suites régulières et complexe de Koszul.

Dans cette sous-section, on étudie le lien entre la notion de suites régulières et celle de complexe de Koszul. On s'inspire de [BH ; section 1.6] et [Ma ; §16] dont les approches sont essentiellement semblables. Un des outils utile pour cette section est la notion de produit tensoriel de complexes. On rappelle les rudiments nécéssaires à ce sujet dans la remarque 1.3.1.

---

[4] C'est un partie de [BH ; 1.2.12], pour le reste de l'énoncé [BH ; 1.2.12] voir 7.3.7.

[5] La preuve présentée ici est celle donée par [BH ; 1.2.13]. Dans [Ma ; 17.2], on trouve une preuve homologique de ce résultat.

Remarque 1.3.1 – (D'après [Ma ; Appendix B, p.282].)
1) Soient R un anneau commutatif, $\mathbf{K}_\bullet = (K_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\mathbf{K}'_\bullet = (K'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux complexes (de chaine) de R-modules :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{K}_\bullet & \ldots \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} K_0 \xrightarrow{d_0} K_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \ldots \\ \mathbf{K}'_\bullet & \ldots \xrightarrow{d'_{n+1}} K'_n \xrightarrow{d'_n} K'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d'_1} K'_0 \xrightarrow{d'_0} K'_{-1} \xrightarrow{d'_{-1}} \ldots \end{array}.$$

À $\mathbf{K}_\bullet$ et $\mathbf{K}'_\bullet$, on associe un couble complexe (attention à la convention sur les signes des flèches verticales) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\ldots & \longleftarrow & K_0\otimes K'_2 & \xleftarrow{d_1\otimes \mathrm{id}} & K_1\otimes K'_2 & \xleftarrow{d_2\otimes \mathrm{id}} & & & \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes d'_2}\downarrow & & {\scriptstyle -\mathrm{id}\otimes d'_2}\downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longleftarrow & K_0\otimes K'_1 & \xleftarrow{d_1\otimes \mathrm{id}} & K_1\otimes K'_1 & \xleftarrow{d_2\otimes \mathrm{id}} & K_2\otimes K'_1 & & \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes d'_1}\downarrow & & {\scriptstyle -\mathrm{id}\otimes d'_1}\downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longleftarrow & K_0\otimes K'_0 & \xleftarrow{d_1\otimes \mathrm{id}} & K_1\otimes K'_0 & \xleftarrow{d_2\otimes \mathrm{id}} & K_2\otimes K'_0 & \xleftarrow{d_3\otimes \mathrm{id}} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & &
\end{array}$$

A ce double complexe, on peut associer son complexe total qui, par définition, est le produit tensoriel de $\mathbf{K}_\bullet$ et $\mathbf{K}'_\bullet$. Ainsi, $\mathbf{K}_\bullet\otimes\mathbf{K}'_\bullet = (\bigoplus_{p+q=n} K_P\otimes K'_q, \delta_n)$, où pour $n\in\mathbb{Z}$, $\delta_n = \bigoplus_{p+q=n} d_p\otimes \mathrm{id} + (-1)^p\mathrm{id}\otimes d'_q$.
2) L'opération de tensorisation de complexes est associative : si $\mathbf{K}_\bullet$, $\mathbf{L}_\bullet$ et $\mathbf{M}_\bullet$ sont des complexes, on a $(\mathbf{K}_\bullet\otimes\mathbf{L}_\bullet)\otimes\mathbf{M}_\bullet \cong \mathbf{K}_\bullet\otimes(\mathbf{L}_\bullet\otimes\mathbf{M}_\bullet)$. Elle est aussi commutative, si $\mathbf{K}_\bullet = (K_i)$ et $\mathbf{L}_\bullet = (L_i)$ sont des complexes, on a un isomorphisme $\mathbf{K}_\bullet\otimes\mathbf{L}_\bullet \cong \mathbf{L}_\bullet\otimes\mathbf{K}_\bullet$ induit par les isomorphismes $K_i\otimes L_j \cong L_j\otimes K_i$ définis par $x\otimes y\mapsto (-1)^{ij} y\otimes x$.

On en vient, à présent, à la définition du complexe de Koszul associé à une suite d'éléments de R. Soit R un anneau noethérien et $\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ une suite d'éléments de R. On considère un R-module libre F de rang n et de base $\{e_1,\ldots,e_n\}$; ainsi, $F = Re_1\oplus\ldots\oplus Re_n$. On dispose alors de $n+1$ R-modules libres non nuls $\bigwedge^p F$, pour $0\le p\le n$. Pour $1\le p\le n$, $\bigwedge^p F$ est le R-module libre de rang $\binom{n}{p}$ et de base $\{e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p} | 1\le i_1<\ldots<i_p\le n\}$. De plus, on pose $\bigwedge^0 F = R$. Notons que, $\bigwedge^n F\cong R$. On peut alors définir le complexe de Koszul, noté $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x})$. Pour $0\le p\le n$, on pose $K_p = \bigwedge^p F$, et pour $p<0$ ou $p>n$, $K_p = 0$. Enfin, pour $2\le p\le n$, la différentielle d est définie par

$$\begin{array}{cccc} d\ : & K_p & \longrightarrow & K_{p-1} \\ & e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p} & \mapsto & \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} x_{i_j} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge \check{e}_{i_j}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} d\ : & K_1 & \longrightarrow & K_0 \\ & e_i & \mapsto & x_i. \end{array}$$

Un calcul immédiat montre que $d\circ d = 0$, de sorte que

$$\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}) \qquad \ldots \xrightarrow{d} 0 \xrightarrow{d} K_n \xrightarrow{d} K_{n-1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} K_1 \xrightarrow{d} K_0 \xrightarrow{d} 0 \xrightarrow{d} \ldots \qquad .$$

est bien un complexe ; il est appelé complexe de Koszul associé à $\mathbf{x}$.

Si M est un R-module, le complexe de Koszul associé à $\mathbf{x}$ et à coefficients dans M, noté $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)$, est défini par $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M) = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}) \otimes M$. Il est clair que le complexe $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x})$ associé à une suite $\mathbf{x} = \{x\}$ (cas $n = 1$) est réduit à

$$\mathbf{K}_\bullet(\{x\}) \qquad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \stackrel{h_{R,x}}{\longrightarrow} R \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \qquad .$$

Compte tenu de la définition de produit tensoriel de complexes, si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a

$$\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_\bullet(\{x_1\}) \otimes \ldots \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x_n\}).$$

Pour une suite $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, l'homologie du complexe de Koszul associé à $\mathbf{x}$ et à coefficients dans M est notée $H_p(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M))$, pour $p \in \mathbb{Z}$. Il est clair que

$$H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = M/\mathbf{x}M \qquad \text{et} \qquad H_n(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = \{\xi \in M | x_1\xi = \ldots = x_n\xi = 0\}.$$

On peut enfin considérer une construction plus générale en partant d'un complexe (de chaine) de R-modules, noté $\mathbf{C}_\bullet$ et en considérant le nouveau complexe $\mathbf{C}_\bullet(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{C}_\bullet$. On sera amené à considerer ce genre de situation pour pouvoir procéder par récurrence dans les preuves des résultats suivants.

Notons que, si $\mathbf{C}_\bullet = (C_i, \partial)$ est un complexe (de chaine), on note $\mathbf{C}_\bullet(-1)$ le complexe obtenu en décidant que le module d'indice i dans $\mathbf{C}_\bullet(-1)$ est C_{i+1}.

Proposition 1.3.2 – [6] *Soit R un anneau et $x \in R$.*
(i) Pour tout complexe (de chaine) de R-modules, $\mathbf{C}_\bullet$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\}) \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet(-1) \longrightarrow 0.$$

(ii) La suite exacte longue en homologie associée à la suite exacte courte ci-dessus est alors :

$$\ldots \longrightarrow H_i(\mathbf{C})_\bullet \longrightarrow H_i(\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{C}) \stackrel{\mathrm{h}_{H_{i-1}(\mathbf{C}),(-1)^{i-1}x}}{\longrightarrow} H_{i-1}(\mathbf{C})_\bullet \longrightarrow \ldots.$$

(iii) De plus, si x est $\mathbf{C}_\bullet$-regulier (c-à-d que, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, x est C_i-régulier), il y a un isomorphisme $\mathbf{H}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})) \cong \mathbf{H}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet/x\mathbf{C}_\bullet)$.
(iv) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $xH_i(\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})) = 0$.

Preuve : (i) Rappelons que $\mathbf{K}_\bullet(\{x\}$ est $0 \longrightarrow R \stackrel{\mathrm{h}_{R,x}}{\longrightarrow} R \longrightarrow 0$ les seuls modules non nuls de ce complexe étant d'indice 0 et 1. Ainsi, après les identifications triviales, le complexe $\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})$ peut être décrit de la façon suivante : pour $i \in \mathbf{Z}$, sa i-ème composante est $C_i \oplus C_{i-1}$ et la différentielle $C_i \oplus C_{i-1} \longrightarrow C_{i-1} \oplus C_{i-2}$ est alors donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_i & (-1)^{i-1}\mathrm{h}_{R,x} \\ 0 & \partial_{i-1} \end{pmatrix}.$$

Il est clair alors qu'on dispose d'une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\}) \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet(-1) \longrightarrow 0.$$

[6] Cet énoncé est la réunion de [BH ; 1.6.12] et [Ma ; 16.4]. Je crois que le point (iii) n'est pas utile pour la suite. Si cette impression se confirme, il faut l'éliminer.

dont la suite exacte courte de modules en degré $i \in \mathbb{Z}$ est

$$0 \longrightarrow C_i \overset{\text{inj.can}}{\longrightarrow} C_i \oplus C_{i-1} \overset{\text{surj.can}}{\longrightarrow} C_{i-1} \longrightarrow 0.$$

(ii) Il s'agit de déterminer le morphisme de connection $H_i(\mathbf{C}_\bullet(-1)) = H_{i-1}(\mathbf{C}_\bullet) \overset{?}{\longrightarrow} H_{i-1}(\mathbf{C})_\bullet$associé à la suite exacte courte de complexe suivante

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_i & \overset{\text{inj.can}}{\longrightarrow} & C_i \oplus C_{i-1} & \overset{\text{surj.can}}{\longrightarrow} & C_{i-1} & \longrightarrow & 0 \qquad \text{degré } i \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \overset{\text{inj.can}}{\longrightarrow} & C_{i-1} \oplus C_{i-2} & \overset{\text{surj.can}}{\longrightarrow} & C_{i-2} & \longrightarrow & 0 \qquad \text{degré } i-1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Un élément de $H_{i-1}(\mathbf{C}_\bullet)$ est s'écrit $z + \operatorname{Im} \partial_i$ avec $z \in C_{i-1}$ et $\partial_{i-1}(z) = 0$. On le relève à $(0, z) \in C_i \oplus C_{i-1}$. Son image sous le morphisme correspondant au complexe $\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})$ est alors $((-1)^{i-1}xz, \partial_{i-1}z) = ((-1)^{i-1}xz, 0)$ qui (comme prévu par la théorie) est en fait dans $\ker \partial_{i-1} \subseteq C_{i-1}$. L'homomorphisme de connection envoie donc $z + \operatorname{Im} \partial_i$ sur $(-1)^{i-1}xz + \operatorname{Im} \partial_i$.
(iii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on dispose d'un morphisme $C_i \oplus C_{i-1} \longrightarrow C_i \longrightarrow C_i/xC_i$. Il est facile de voir que ces applications définissent un morphisme de complexe $\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\}) \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet/x\mathbf{C}_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & C_{i+1} \oplus C_i & \longrightarrow & C_i \oplus C_{i-1} & \overset{\begin{pmatrix} \partial_i & (-1)^{i-1}\mathrm{h}_{R,x} \\ 0 & \partial_{i-1} \end{pmatrix}}{\longrightarrow} & C_{i-1} \oplus C_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{i+1}/xC_{i+1} & \longrightarrow & C_i/xC_i & \overset{\bar{\partial}_i}{\longrightarrow} & C_{i-1}/xC_{i-1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}.$$

L'application induite en homologie est un isomorphisme. En effet, un élément de $H_i(\mathbf{C}_\bullet/x\mathbf{C}_\bullet)$ s'écrit sous la forme $(z + xC_i) + \operatorname{Im} \overline{\partial_{i+1}}$ avec $\partial_i(z) \in xC_{i-1}$. On pose $\partial_i(z) = xz'$. Mais, $(z, (-1)^i z') \in C_i \oplus C_{i-1}$ est envoyé sur $(\partial_i z + (-1)^{i-1}(-1)^i xz', (-1)^i \partial_{i-1} z') = (0, (-1)^i \partial_{i-1} z')$. Mais, $0 = \partial_{i-1}\partial_i z = x\partial_{i-1}z'$. L'hypothèse de C_{i-2}-régularité faite sur x assure donc que $\partial_{i-1}z' = 0$ et par suite, on obtient que $(z, (-1)^i z')$ appartient au noyau de $C_i \oplus C_{i-1} \longrightarrow C_{i-1} \oplus C_{i-2}$. Il est clair alors que sa classe modulo l'image de $C_{i+1} \oplus C_i \longrightarrow C_i \oplus C_{i-1}$ fournit un antécédent à $(z + xC_i) + \operatorname{Im} \overline{\partial_{i+1}}$. On a donc prouvé la surjectivité de l'application induite en homologie. Pour prouver l'injectivité de cette application, considérons un élément de son noyau : c'est la classe modulo l'image de $C_{i+1} \oplus C_i \longrightarrow C_i \oplus C_{i-1}$ d'un couple $(z, z') \in C_i \oplus C_{i-1}$ tel que $(\partial_i z + (-1)^{i-1}xz', \partial_{i-1}z') = (0, 0)$ et tel qu'en outre $z + xC_i \in \operatorname{Im} \overline{\partial_{i+1}}$. Comme $z + xC_i \in \operatorname{Im} \overline{\partial_{i+1}}$, il existe $y \in C_{i+1}$ tel que $z - \partial_{i+1}(y) \in xC_i$. Posons $z = \partial_{i+1}(y) + x(-1)^i y'$ $(y' \in C_i)$. Il vient $\partial_i z = x(-1)^i \partial_i y' = -(-1)^{i-1}xz'$ (puisque $\partial_i z + (-1)^{i-1}xz' = 0$). La C_{i-1}-régularité de x assure alors que $\partial_i y' = z'$. On a prouvé que $(z, z') = (\partial_{i+1}y + (-1)^i xy', \partial_i y')$, ce qui montre l'injectivité de l'application induite en homologie.
(iv) Un élément de $H_i(\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\}))$ est la classe modulo l'image de $C_{i+1} \oplus C_i \longrightarrow C_i \oplus C_{i-1}$ d'un élément $(z, z') \in C_i \oplus C_{i-1}$ tel que $\partial_i z + (-1)^{i-1}xz' = \partial_{i-1}z' = 0$. Ainsi, $x(z, z') = (xz, xz') = ((-1)^i x(-1)^i z, \partial_i((-1)^i z))$ qui n'est autre que l'image de $(0, (-1)^i z)) \in C_{i+1} \oplus C_i$ par $C_{i+1} \oplus C_i \longrightarrow C_i \oplus C_{i-1}$. Ainsi, $xH_i(\mathbf{C}_\bullet \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x\})) = 0$. ■

Corollaire 1.3.3 – [7] *Soit R un anneau, M un R-module et $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite d'éléments de R.*
(i) Si l'on pose $\mathbf{x}' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, on a une suite exacte

$$\ldots \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \stackrel{\mathrm{h}_{\ldots,(-1)^{i-1}x_n}}{\longrightarrow} H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to \ldots.$$

(ii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $(\mathbf{x})H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = (0)$.

Preuve : (i) C'est un cas particulier du point (ii) de la proposition 1.3.2 avec $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)$ et $x = x_n$ et ceci, compte tenu du fait que (d'après le second point de 1.3.1) $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M) = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}) \otimes M \cong \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}') \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x_n\}) \otimes M \cong \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}') \otimes M \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x_n\}) = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M) \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x_n\})$.
(ii) On a déja mentionné ci-dessus que $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M) \cong \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M) \otimes \mathbf{K}_\bullet(\{x_n\})$. On peut alors appliquer le point (iv) de 1.3.2 (avec $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)$) qui assure que x_n annule les $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M))$, pour $i \in \mathbb{Z}$. Compte tenu de la commutativité du produit tensoriel de complexes (voir le second point de 1.3.1), on peut refaire la même chose avec x_i, pour $1 \leq i \leq n$. On conclut donc que $(x_1, \ldots, x_n)$ annule $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M))$, pour $i \in \mathbb{Z}$. ∎

Corollaire 1.3.4 –[8] *Soit R un anneau, M un R-module et $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite M-régulière ; alors : $H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = M/\mathbf{x}M$ et, pour $i > 1$, $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M) = 0$.*

Preuve : On a déjà mentionné que $H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = M/\mathbf{x}M$. Pour le reste, on procède par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, on a $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = \{\xi \in M | x\xi = 0\}$. Donc le résultat est vrai puisque x est M-régulier. Supposons $n > 1$. Pour $i > 1$, et par hypothèse de récurrence, d'après 1.3.3, on a une suite exacte $0 = H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$ qui montre que $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$. En appliquant à nouveau 1.3.3, on a une suite exacte

$$0 = H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \stackrel{\mathrm{h}_{\ldots,x_n}}{\longrightarrow} H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to \ldots.$$

Comme $H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = M/\mathbf{x}'M$, et comme x_n est $M/\mathbf{x}'M$-régulier, $\mathrm{h}_{\ldots,x_n}$ est une injection. L'exactitude de la suite ci-dessus conduit donc à $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$. ∎

Remarque 1.3.5 – Soit R un anneau et $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite (R-)régulière. Le corollaire 1.3.4 montre que $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x})$ est une résolution libre de $R/(\mathbf{x})$.

Soit R un anneau noethérien, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R et M un R-module de type fini tel que $IM \neq M$. On montre, à présent, comment la profondeur prof (I, M) peut se lire dans le complexe de Koszul $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)$.

Lemme 1.3.6 – [9] *Soit R un anneau, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite d'éléments de R et $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de R-modules. Alors, la suite induite $0 \longrightarrow \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, U) \longrightarrow \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, V) \longrightarrow \mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, W) \longrightarrow 0$ est exacte. En particulier, on a une suite exacte longue*

$$\ldots \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, U)) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, V)) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, W)) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, U)) \longrightarrow \ldots$$

[7] Le point (ii) de ce corollaire est une remarque de [Ma] qui suit la preuve de son théo. 16.4. Le reste de ce corollaire est le point (i) de [BH ; 1.6.13]. Je n'ai pas inséré le point (ii) dont je ne pense pas avoir besoin pour la suite. L'utilité de 1.3.3 réside dans le corollaire 1.3.4.
[8] Ce corollaire est [BH ; 1.6.14] ou plutôt la version plus explicite [Ma ; 16.5] ; la présente preuve figure dans [Ma ; 16.5].
[9] C'est [BH ; 1.6.11].

Preuve : C'est immédiat puisque tous les modules du complexe de Koszul $\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x})$ sont libres et donc plats. ∎

Théorème 1.3.7 – [10] *Soit R un anneau noethérien, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R et M un R-module de type fini tel que $IM \neq M$. L'ensemble $\{i \in \{0, \ldots, n\} \mid H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \neq 0\}$ est non vide et on pose $h = \max\{i \in \{0, \ldots, n\} \mid H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \neq 0\}$. Alors,* $\operatorname{prof}(I, M) = n - h$.

Preuve : Le fait que $\{i \in \{0, \ldots, n\} \mid H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \neq 0\}$ soit non vide est clair puisque, du fait qu'on suppose $IM \neq M$, on a $H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \neq 0$ (voir 1.3.4). Rappelons que, par définition, $\operatorname{prof}(I, M)$ est la longueur, que l'on notera s, d'une suite M-régulière maximale dans I. La preuve procède par récurrence sur s. Si $s = 0$, I est un idéal dont tous les éléments sont des diviseurs de zéro de M, donc 1.2.2 assure qu'il existe un idéal premier associé $\mathfrak{p}$ de M tel que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Donc, il existe $\xi_0 \in M \setminus \{0\}$ tel que $I \subseteq \mathfrak{p} = \operatorname{Ann} \xi_0$. Comme par ailleurs $H_n(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = \{\xi \in M \mid x_1\xi = \ldots = x_n\xi = 0\}$, il vient $0 \neq \xi_0 \in H_n(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \neq (0)$. Donc, $h = n$ et l'assertion est prouvée. Supposons, à présent, que $s > 0$ et soit $\{y_1, \ldots, y_s\}$ une suite M-régulière maximale d'éléments de I. On pose $M_1 = M/x_1M$; on dispose alors d'une suite exacte courte $0 \longrightarrow M \overset{\mathrm{h}_{M,y_1}}{\longrightarrow} M \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$ et, d'après 1.3.6, d'une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \overset{\mathrm{h}_{\ldots,y_1}}{\longrightarrow} H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M_1)) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \longrightarrow \ldots.$$

Rappelons que, d'après 1.3.3, $IH_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$, pour $i \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit donc que $y_1H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$, pour $i \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, pour $i \in \mathbb{Z}$, on dispose de suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M_1)) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \longrightarrow 0.$$

Posons $h_1 = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M_1)) \neq 0\}$. La suite exacte courte ci-dessus, avec $i = h + 1$, montre que $H_{h+1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M_1)) \neq 0$. La suite exacte courte ci-dessus, avec $i > h + 1$, montre que $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M_1)) = 0$ si $i > h + 1$. Ainsi, on a $h_1 = h + 1$. La suite $\{y_2, \ldots, y_s\}$ est une suite M_1-régulière maximale d'éléments de I. Par hypothèse de récurrence, on a donc $s - 1 = \operatorname{prof}(I, M_1) = n - h_1$. Et donc, ce qui précède montre que $s = n - h$. ∎

Remarque 1.3.8 – Il est utile, à ce stade, de noter que pour R un anneau noethérien, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R et M un R-module de type fini tel que $IM \neq M$, on a nécéssairement $\operatorname{prof}(I, M) \leq n$. C'est un conséquence immédiate de 1.3.7.

Lemme 1.3.9 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un R-module de type fini et $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$. On pose $\mathbf{x}' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Alors, pour $i \in \mathbb{Z}$, $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$ entraîne $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$.*

Preuve : D'après le corollaire 1.3.3, on dispose d'une suite exacte

$$\ldots \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \overset{\mathrm{h}_{\ldots,(-1)^{i-1}x_n}}{\longrightarrow} H_{i-1}(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to \ldots.$$

Ainsi, si l'on suppose que $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$, il vient que

$$\ldots \to H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \overset{\mathrm{h}_{\ldots,(-1)^{i}x_n}}{\longrightarrow} H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to 0.$$

Il s'ensuit que $x_nH_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$ et donc, a forciori que $\mathfrak{m}H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$. D'après le lemme de Nakayama, on a donc $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$. ∎

[10] Ce théo. est [Ma ; 16.8] dont j'ai aussi empruntée la preuve. C'est une version légèrement affaiblie de [BH ; 1.6.17]).

Corollaire 1.3.10 – [11] *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R inclus dans $\mathfrak{m}$ et M un R-module de type fini et non nul. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\operatorname{prof}(I, M) = n$;
(ii) $H_i(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$ *pour* $1 \leq i \leq n$;
(iii) $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$;
(iv) $\mathbf{x}$ *est une suite M-régulière.*

Preuve : Notons que, M étant supposé non nul, on a $IM \neq M$ à cause du lemme de Nakayama. L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate d'après 1.3.7. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale. Pour montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (iv), on procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial puisque, $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\{x_1\}, M)) = \ker \mathrm{h}_{M,x}$. On suppose le résultat vrai à l'ordre $n-1$ et on suppose, par ailleurs que $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) = 0$. Alors, 1.3.9 montre que $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = 0$ (où $\mathbf{x}' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$). L'hypothèse de récurrence assure alors que $\mathbf{x}' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ est une suite M-régulière. D'après le corollaire 1.3.3, on dispose d'une suite exacte

$$\ldots \to H_1(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \stackrel{\mathrm{h}_{\ldots,x_n}}{\longrightarrow} H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to 0,$$

c'est-à-dire en l'occurence,

$$0 \to H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \stackrel{\mathrm{h}_{\ldots,x_n}}{\longrightarrow} H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) \to H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}, M)) \to 0.$$

Compte tenu de ce que $H_0(\mathbf{K}_\bullet(\mathbf{x}', M)) = M/(\mathbf{x}')M$, la suite exacte ci-dessus montre que x_n est régulier modulo $M/(\mathbf{x}')M$. Joint à la M-régularité de $\mathbf{x}'$, ceci assure que $\mathbf{x}$ est M-régulière. Enfin, il est clair que (iv) entraîne que $\operatorname{prof}(I, M) \geq n$. Mais, d'après 1.3.8, on a aussi $\operatorname{prof}(I, M) \leq n$. Donc, (iv) entraîne (i) et la preuve est complète. ∎

Remarque 1.3.11 – Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite d'éléments de R, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ et M un R-module de type fini. Si $\mathbf{x}$ est M-régulière, alors $IM \neq M$ par définition, ainsi $I \subseteq \mathfrak{m}$ et on est en position d'appliquer 1.3.10. Il s'ensuit aussitôt, que toute permutation de $\mathbf{x}$ est encore une suite M-régulière puisque (i) est indépendant de l'ordre choisit.

Exemple 1.3.12 – [12] L'objet de cet exemple est de mettre en évidence le fait que les hypothèses faites au corollaire 1.3.10 et à la remarque 1.3.11, à savoir que l'anneau R est local, sont indispensables. On considère l'anneau $R = k[x, y, z]/(xz - z)$ et la suite $\{x, (x-1)y\} \subseteq R$. Posons, $I = (x, (x-1)y) \subseteq R$. On a $I = (x, y)$, de sorte que $I \neq R$. On voit facilement que x est un élément régulier de R. De plus, $R/(x) = k[y]$. Donc, $(x-1)y$ est régulier modulo x dans R. Ainsi, la suite $\{x, (x-1)y\} \subseteq R$ est régulière. On en déduit aussitôt que $H_1(\mathbf{K}_\bullet(\{x, (x-1)y\})) = 0$, et ce d'après 1.3.4. Cependant, il est clair que $(x-1)y$ est un diviseur de 0 de R puisque, par exemple, $(x-1)yz = 0$. Cet exemple met donc en défaut 1.3.11 dans le cas non local et donc aussi 1.3.10.

---

[11] Cet énoncé est [BH ; 1.6.19]. Notons que, dans [Ma ; Corollaire au théorème 16.8], Matsumura donne une version globale de ce résultat qui est en fait fausse comme le montre l'exemple que l'on trouve dans [Ei ; 17.3].
[12] C'est [Ei ; 17.3].

2 Anneaux de Cohen-Macaulay.

2.1 Définition et lien avec les suites régulières.

À la proposition 1.2.15, on a vu que, si $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et M un R-module non nul, de type fini, $\operatorname{prof} M \leq \dim M$. Ainsi, l'invariant géométrique $\dim M$ borne l'invariant algébrique $\operatorname{prof} M$. Ceci conduit à la définition de module de Cohen-Macaulay.

Définition 2.1.1 – *(i) Soit R un anneau local noethérien. On dit qu'un R-module M de type fini est de Cohen-Macaulay si $M = 0$ ou si $M \neq 0$ et $\operatorname{prof} M = \dim M$. On dit que R est un anneau de Cohen-Macaulay si R est Cohen-Macaulay en tant que R-module.*
(ii) Soit R un anneau noethérien. On dit qu'un R-module M de type fini est de Cohen-Macaulay si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$, le $R_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$ est Cohen-Macaulay. On dit que R est un anneau de Cohen-Macaulay si R est Cohen-Macaulay en tant que R-module.

Remarque 2.1.2 – (i) Soit R un anneau local noethérien, M un R-module non nul de type fini et I un idéal de R tel que $I \subseteq \operatorname{Ann} M$. La dimension de M est la même, qu'on le considère comme R-module ou comme R/I-module. D'autre part, on voit aisément que la profondeur de M vu comme R-module ou comme R/I-module est la même (cela tient au fait que $x + I \in R/I$ agit sur M comme $x \in R$). Il s'ensuit que M est Cohen-Macaulay comme R-module si et seulement si il l'est comme R/I-module.
(ii) Ceci reste vrai dans le cas global. Soit R un anneau noethérien, M un R module non nul de type fini et I un idéal de R tel que $I \subseteq \operatorname{Ann} M$. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R contenant $\operatorname{Ann} M$, on peut considérer le $R_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$. Il est clair qu'il contient $IR_{\mathfrak{m}}$ dans son annulateur et on peut donc considérer le $R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$. Soit $\bar{\mathfrak{m}}$ l'image de $\mathfrak{m}$ dans la projection canonique $R \longrightarrow R/I$; M est un R/I-module et on peut considérer le $(R/I)_{\bar{\mathfrak{m}}}$-module $M_{\bar{\mathfrak{m}}}$. Il est bien connu que $(a + I)/(s + I) \mapsto a/s + IR_{\mathfrak{m}}$ est un isomorphisme d'anneaux entre $(R/I)_{\bar{\mathfrak{m}}}$ et $R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}$. Il est alors facile de montrer que, si $M_{\bar{\mathfrak{m}}}$ est vu comme un $R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}$-module (via l'isomorphisme ci-dessus), il est isomorphe à $M_{\mathfrak{m}}$ via $m/(s + I) \mapsto m/s$.

Ainsi, le R-module M est Cohen-Macaulay si et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R contenant $\operatorname{Ann} M$, $M_{\mathfrak{m}}$ est un $R_{\mathfrak{m}}$-module de Cohen-Macaulay. D'après (i), ceci revient à dire que $M_{\mathfrak{m}}$ est un $R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}$-module de Cohen-Macaulay. À nouveau, ce qui précède montre que ceci équivaut à dire que $M_{\bar{\mathfrak{m}}}$ est un $(R/I)_{\bar{\mathfrak{m}}}$-module de Cohen-Macaulay. Ceci étant vrai pour tout $\mathfrak{m}$ maximal au-dessus de l'annulateur du R-module M (c'est-à-dire pour tout $\bar{\mathfrak{m}}$ maximal au dessus de l'annulateur $\overline{\operatorname{Ann} M}$ du R/I-module M), ce qui précède équivaut au fait que M est un R/I-module de Cohen-Macaulay.

Dans ce qui suit, on donne les propriétés essentielles des anneaux de Cohen-Macaulay. Pour ce faire, l'exposé suit [BH, section 2.1] et [Ma, §17].

Rappelons qu'on a montré, au théorème 1.2.16, que si $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un R-module non nul de type fini et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, alors $\operatorname{prof} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$. Le théorème 2.1.4 montre (entre autre) qu'on dispose d'un résultat plus précis si M est un module de Cohen-Macaulay.

Lemme 2.1.3 – *Soit R un anneau noethérien, M un R-module non nul et $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal au-dessus de* $\operatorname{Ann} M$ *; alors* $\operatorname{Ann} M/\mathfrak{p}M = \mathfrak{p}$.

Preuve : Puisque $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal au-dessus de $\operatorname{Ann} M$, c'est un idéal premier associé du R-module $R/\operatorname{Ann} M$. Donc, il existe $x \in R$ tel que $\mathfrak{p} = \{y \in R \mid yx \in \operatorname{Ann} M\}$. Alors, si l'on pose $J = \operatorname{Ann} M/\mathfrak{p}M$, $xJM = 0$. De sorte que $xJ \in \operatorname{Ann} M$. Ainsi, $J \subseteq \mathfrak{p}$. Comme l'inclusion $J \supseteq \mathfrak{p}$ est triviale, il vient $J = \mathfrak{p}$. ∎

Théorème 2.1.4 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et M un R-module non nul et Cohen-Macaulay. Alors :*
(i) pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, $(\dim M =)\operatorname{prof} M = \dim R/\mathfrak{p}$ (en particulier, M n'a pas d'idéaux premiers associés plongés) ;
(ii) pour tout idéal $I \subseteq \mathfrak{m}$, $\operatorname{prof}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$;
(iii) une suite $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ est une suite M-régulière si et seulement si $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - r$;
(iv) une suite $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ est une suite M-régulière si et seulement si c'est une partie d'un système de paramètres.

Preuve : (i) D'après 1.2.16, on a $\operatorname{prof} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$. D'autre part, il est clair que $\dim R/\mathfrak{p} \leq \dim R/\operatorname{Ann} M = \dim M$. Comme M est Cohen-Macaulay, $\dim M = \operatorname{prof} M$ et il vient $\operatorname{prof} M = \dim R/\mathfrak{p}$.
(ii) Par récurrence sur $\operatorname{prof}(I, M)$. Si $\operatorname{prof}(I, M) = 0$, I est constitué exclusivement de diviseurs de zéro de M et par suite, $I \subseteq \mathfrak{p}$ pour un certain $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Il est clair que $\dim M/\mathfrak{p}M \leq \dim M/IM$. D'autre part, comme d'après le point (i) $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal au-dessus de $\operatorname{Ann} M$, le lemme 2.1.3 et le point (i) lui-même assurent que $\dim M/\mathfrak{p}M = \dim R/\mathfrak{p} = \dim M$. Il s'ensuit que $\dim M/IM \geq \dim M$. L'autre inégalité est triviale, de sorte que $\dim M/IM = \dim M$.

Supposons, à présent, que $\operatorname{prof}(I, M) > 0$. On choisit $x \in I$, M-régulier. Alors, on a $\operatorname{prof}(I, M/xM) = \operatorname{prof}(I, M) - 1$ et $\operatorname{prof} M = \operatorname{prof} M/xM + 1$ (voir 1.2.11 (e)). De plus, comme x est M-régulier, $\dim M/xM = \dim M - 1$ (voir 7.3.7). On en déduit que M/xM est un R-module Cohen-Macaulay (puisque M en est un). On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $\operatorname{prof}(I, M/xM) = \dim M/xM - \dim(M/xM)/I(M/xM) = \dim M/xM - \dim(M/xM)/(IM/xM) = \dim M/xM - \dim M/IM$. Il vient aussitôt $\operatorname{prof}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$.
(iii) Le fait que, si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite M-régulière, $\dim M - \dim M/\mathbf{x}M = r$ se déduit de 7.3.7. L'implication inverse est immédiate en combinant (avec $I = (\mathbf{x})$) le point (ii) et 1.3.10.
(iv) Compte tenu de 7.3 (iii), (iv) est une reformulation de (iii). ∎

Dans l'énoncé suivant, on montre que la propriété de Cohen-Macaulay est stable par localisation et par passage au quotient modulo une suite régulière.

Proposition 2.1.5 – [13] *Soit R un anneau noetherien et M un R-module de type fini et Cohen-Macaulay.*
(i) Si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite M-régulière , alors $M/\mathbf{x}M$ est un module de Cohen-Macaulay.
(ii) Si $\mathcal{S}$ est une partie multiplicative de R, alors $M\mathcal{S}^{-1}$ est un $R\mathcal{S}^{-1}$-module de Cohen-Macaulay. En particulier, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, alors $M_{\mathfrak{p}}$ est Cohen-Macaulay. De plus, si $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{prof}(\mathfrak{p}, M)$.

Preuve : (i) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R. On a ([Ma ; Theo. 4.4, 4.5]) un isomorphisme canonique de $R_{\mathfrak{m}}$-modules
$$(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}} \cong M_{\mathfrak{m}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{m}}.$$
Par définition, $M_{\mathfrak{m}}$ est Cohen-Macaulay puisque M est Cohen-Macaulay. De plus, on peut se limiter (par définition) au cas où $\mathfrak{m}$ est dans le support du R-module $M/\mathbf{x}M$. En particulier, l'isomorphisme ci-dessus assure que $\mathfrak{m}$ est dans le support de M et que $\mathbf{x} \subseteq \mathfrak{m}$. On peut donc appliquer le lemme 1.1.2 qui montre que $\mathbf{x}/1$ est une suite $M_{\mathfrak{m}}$-régulière de $R_{\mathfrak{m}}$. Il s'ensuit d'après

[13] C'est une partie de [BH ; 2.1.3].

7.3.7 que $\dim(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}} = \dim M_{\mathfrak{m}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{m}} = \dim M_{\mathfrak{m}} - r$ et d'après 1.2.11 que $\mathrm{prof}\,(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{prof}\, M_{\mathfrak{m}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{m}} = \mathrm{prof}\, M_{\mathfrak{m}} - r$. Comme $M_{\mathfrak{m}}$ est Cohen-Macaulay, on a $\dim M_{\mathfrak{m}} = \mathrm{prof}\, M_{\mathfrak{m}}$ et il vient donc $\dim(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{prof}\,(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}}$, ce qui montre que $(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}}$ est Cohen-Macaulay et clos la démonstration de premier point.
(ii) [14] ∎

Théorème 2.1.6 – [15] *Soit R un anneau noetherien Cohen-Macaulay et $I \neq R$ un idéal de R.*
(i) On a $\mathrm{grade}\, R/I = \mathrm{ht}\, I$.
(ii) Si $(R, \mathfrak{m})$ est local, $\dim R/I + \mathrm{ht}\, I = \dim R$. *De plus, si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. $\mathbf{x}$ *est une suite régulière,*
2. pour $1 \leq i \leq r$, $\mathrm{ht}\,(x_1, \ldots, x_i\} = i$,
3. $\mathrm{ht}\,(\mathbf{x}) = r$.

Preuve : Par définition, $\mathrm{ht}\, I := \inf\{\dim R_{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}\,(I)\}$. De plus, d'après 1.2.11, $\mathrm{grade}\, R/I = \mathrm{prof}\,(I, R) = \inf\{\mathrm{prof}\, R_{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}\,(I)\}$. Comme R est Cohen-Macaulay, d'après 2.1.5, on sait que $R_{\mathfrak{p}}$ est Cohen-Macaulay, et donc par définition, on a $\dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{prof}\, R_{\mathfrak{p}}$. Le point (i) s'ensuit aussitôt. Pour démontrer (ii), il suffit d'utiliser (i) et 2.1.4 (ii) et (iii). ∎

2.2 Propriétés des anneaux Cohen-Macaulay.

On commence par établir qu'un anneau de polynôme sur un anneau noethérien est Cohen-Macaulay si et seulement si son anneau de base l'est lui-même. On donne ensuite deux propriétés des anneaux de Cohen-Macaulay qui témoignent de leur bon comportement vis-à-vis de la dimension. La première est l'universelle caténarité, la seconde est la propriété de non-mixité.

Théorème 2.2.1 – *Soit R un anneau nothérien. Un anneau de polynômes $R[X_1, \ldots, X_n]$ est Cohen-Macaulay si et seulement si R est Cohen-Macaulay.*

Preuve : [16] Admis. ∎

Définition 2.2.2 – *Un anneau noethérien R est dit caténaire si pour tout couple $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ d'idéaux premiers comparables de R, toutes les chaines saturées (c'est-à-dire maximales) joignant $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ ont même longueur. Un anneau nothérien R est dit universellement caténaire si toute R-algèbre de type fini est caténaire.*

Théorème 2.2.3 – *Un anneau noethérien Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

Preuve : Il est clair, d'après 2.2.1, qu'il suffit de montrer que R est caténaire. Soient $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ deux idéaux premiers comparables de R. Comme R est Cohen-Macaulay, 2.1.5 assure que l'anneau local $R_{\mathfrak{q}}$ est Cohen-Macaulay. Donc, d'après 2.1.6, $\dim R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} + \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} = \dim R_{\mathfrak{q}}$. Comme $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} = \dim R_{\mathfrak{q}}$ et $\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}}$, il vient que $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} - \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} = \dim R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} = \mathrm{ht}\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ (bien sûr, $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ est la hauteur de $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ dans $R/\mathfrak{p}$). On a donc montré que pour tous $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, R$, tels que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, on a $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = \mathrm{ht}\, \mathfrak{q} - \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}$. Il est bien connu que cette propriété assure la caténarité de R. ∎

On passe maintenant à la propriété de non-mixité.

[14] Pour le moment, on admet, voir ultérieurement si une preuve s'impose.
[15] C'est [BH ; 2.1.4] et [Ma ; 17.4].
[16] Pour le moment, on admet ce théorème. On peut néanmoins consulter la preuve très claire qui figure dans [Ei ; 18.9].

Définition 2.2.4 – *Soit R un anneau nothérien. On dit qu'un idéal $I \neq R$ de R satisfait à la propriété de non-mixité si* $\mathrm{Ass}\, R/I$ *coïncide avec l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de I (autrement dit, si R/I n'a pas d'idéaux associés plongés).*

Rappelons le théorème de l'idéal principal de Krull (voir 7.2) : Soit R un anneau noethérien et $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, minimal au-dessus de I, $\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leq n$. En particulier, $\mathrm{ht}\, I := \inf\{\mathrm{ht}\, \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R,\ \mathfrak{p} \supseteq I\} \leq n$. De plus, si $I = (x_1, \ldots, x_n)$ est un idéal de hauteur n, alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un famille minimale de générateurs de I et tous les idéaux premiers minimaux au-dessus de I ont (même) hauteur n.

Théorème 2.2.5 – [17] *Un anneau noethérien R est de Cohen-Macaulay si et seulement si tout idéal I (qui peut être) engendré par* $\mathrm{ht}\, I$ *éléments satisfait à la propriété de non-mixité.*

Preuve : Condition nécéssaire. On suppose que R est Cohen-Macaulay et que $I = (x_1, \ldots, x_n)$ est un idéal de hauteur n de R. Soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\,(R/I)$ tels que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. L'anneau local $R_\mathfrak{q}$ est Cohen-Macaulay d'après 2.1.5 et on peut donc appliquer 2.1.6 qui montre que $\dim R_\mathfrak{q} - \dim R_\mathfrak{q}/IR_\mathfrak{q} = \mathrm{ht}\, IR_\mathfrak{q}$. Puisque $IR_\mathfrak{q}$ est engendré par n éléments, le théorème de Krull 7.2.1 assure que $\mathrm{ht}\, IR_\mathfrak{q} \leq n$. De plus, comme $\mathrm{ht}\, I = n$, par définition de la hauteur, $\mathrm{ht}\, IR_\mathfrak{q} \geq n$ (voir 7.4.1). Ainsi, $\dim R_\mathfrak{q}/IR_\mathfrak{q} = \dim R_\mathfrak{q} - n$ et d'après 2.1.4, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite $R_\mathfrak{q}$-régulière. Il s'ensuit d'après 2.1.5 que $R_\mathfrak{q}/IR_\mathfrak{q}$ est un module de Cohen-Macaulay. Mais, par ailleurs, les idéaux $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ sont dans $\mathrm{Ass}\, R_\mathfrak{q}/IR_\mathfrak{q}$ (voir [Ei ; Theo. 3.1 (c)]). On doit donc avoir $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ en vertu de 2.1.4. Il s'ensuit (voir [Ei ; 2.2]) que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.
Condition suffisante. Soit J un idéal quelconque de R de hauteur n. En vertu de 7.2, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans J tels que, pour $1 \leq i \leq n$, on ait $\mathrm{ht}\,(x_1, \ldots, x_i) = i$. Par hypothèse, pour $1 \leq i \leq n$, $(x_1, \ldots, x_i)$ doit satisfaire la propriété de non-mixité, c'est-à-dire que tous ses idéaux premiers associés sont de hauteur i. Ainsi, x_{i+1} n'est dans aucun des idéaux premiers associés de $(x_1, \ldots, x_i)$ et il est donc régulier modulo $(x_1, \ldots, x_i)$ (voir 7.1). Ceci montre que la suite $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite régulière dans J. (On a donc montré que $\mathrm{grade}\, R/J \geq \mathrm{ht}\, J$. D'après 1.2.17, il s'ensuit que $\mathrm{grade}\, R/J = \mathrm{ht}\, J$.) Ceci montre en particulier que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur n de R, contient une suite régulière à n éléments. D'après 1.1.2, il s'ensuit que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ contient une suite $(R_\mathfrak{p}$-)régulière à $\mathrm{ht}\, \mathfrak{p}$ éléments. De ceci, on déduit que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{prof}\, R_\mathfrak{p} \geq \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}$. Comme par ailleurs $\mathrm{prof}\, R_\mathfrak{p} \leq \dim R_\mathfrak{p}$ d'après 1.2.15, on obtient que $\mathrm{prof}\, R_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}$, c'est-à-dire que $R_\mathfrak{p}$ est un anneau de Cohen-Macaulay pour tout $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}\, R$. Ceci assure, par définition, que R lui-même est Cohen-Macaulay. ∎

Remarque 2.2.6 – **Un point historique.** En 1916, Macaulay a montré que tout idéal $(x_1, \ldots, x_n)$ de hauteur n dans un anneau de polynômes sur un corps satisfait à la propriété de non-mixité. En 1946, Cohen a montré le même résultat pour un anneau local régulier. Ceci explique la dénomination anneau de Cohen-Macaulay : en effet, on a vu en 2.2.1 qu'un anneau de polynômes sur un corps est Cohen-Macaulay et on verra plus loin que c'est aussi le cas d'un anneau local régulier.

[17] C'est [BH ; 2.1.6] et [Ma ; 17.6].

3 Premiers exemples.

3.1 Anneaux locaux réguliers.

On a déjà évoqué brièvement le cas des anneaux locaux réguliers en introduction ; on va maintenant préciser leurs propriétés.

Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien dont le corps résiduel $R/\mathfrak{m}$ est noté k. L'idéal $\mathfrak{m}$ est de type fini, ce qui permet de poser la définition suivante.

Définition 3.1.1 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, la dimension de plongement de R, notée* $\mathrm{emb\,dim}R$, *est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une famille à n éléments qui engendre $\mathfrak{m}$ (par convention, si $\mathfrak{m} = 0$, c'est-à-dire si R est un corps, $n = 0$).*

Remarque 3.1.2 – (Voir les rappels en 7.5). Le lemme de Nakayama assure qu'une famille $\{y_1, \ldots, y_p\}$ engendre $\mathfrak{m}$ si et seulement si $\{y_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, y_p + \mathfrak{m}^2\}$ est une famille de générateurs du $R/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On peut même préciser : $\{y_1, \ldots, y_p\}$ est une famille de minimale de générateurs de $\mathfrak{m}$ si et seulement si $\{y_1+\mathfrak{m}^2, \ldots, y_p+\mathfrak{m}^2\}$ est une base du $R/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (notons que ceci équivaut aussi à dire que $\{y_1, \ldots, y_p\}$ est une famille de cardinal minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$). Au passage, ceci montre que $\mathrm{emb\,dim}R$ est le cardinal commun à toute les familles minimales de générateurs de $\mathfrak{m}$. Joint au théorème de l'idéal principal de Krull (voir 7.2.1) on déduit de ce qui précède que

$$\dim R := \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leq \mathrm{emb\,dim}R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Définition 3.1.3 – *L'anneau local nothérien $(R, \mathfrak{m})$ est dit régulier si* $\dim R = \mathrm{emb\,dim}R$.

Le premier résultat important concernant les anneaux locaux réguliers est leur intégrité. La démonstration de ce résultat nécéssite une version raffinée du lemme d'évitement que nous rappelons sans démonstration.

Lemme 3.1.4 – **Version raffinée du lemme d'évitement.** *Soient $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux d'un anneau R dont au plus deux ne sont pas premiers. Si J est un idéal de R contenu dans la réunion des I_i, $1 \leq i \leq n$, alors J est inclus dans l'un des I_i pour $1 \leq i \leq n$.*

Preuve : Voir [Ei ; Lemma 3.3]. ∎

Théorème 3.1.5 – *Si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien régulier, alors R est intègre.*

Preuve : On procède par récurrence sur $\dim R$. Si $\dim R = 0$, alors on doit avoir $\mathfrak{m} = (0)$, de sorte que R est un corps ; l'assertion est donc vraie. On suppose à présent, que $\dim R > 0$ et que le résultat est vrai pour tout anneal local régulier de dimension strictement inférieure à $\dim R$. Comme $\dim R > 0$, le lemme de Nakayama assure que $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$ (inclusion stricte). Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers minimaux de R. Le lemme d'évitement 3.1.4 montre que $\mathfrak{m}$ n'est pas inclus dans $\cup_{1 \leq i \leq s} \mathfrak{p}_i \cup \mathfrak{m}^2$ puisque $\mathfrak{m}$ n'est inclus ni dans $\mathfrak{m}^2$ (voir ce qui précède) ni dans aucun des $\mathfrak{p}_i$ puisque $\dim R > 0$. Donc, il existe $x \in \mathfrak{m}$ tel que $x \notin \mathfrak{m}$ et $x \notin \mathfrak{p}_i$ pour $1 \leq i \leq s$. Posons alors $S = R/(x)$. C'est un anneau local dont on note $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal. On a $\dim S \geq \dim R - 1$ (voir 7.3.3). Le choix de x hors de $\mathfrak{m}^2$ montre que l'on peut construire une famille minimale de générateurs de $\mathfrak{m}$ contenant x (en relevant une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ contenant $x + \mathfrak{m}^2$). Soit $\{x, y_2, \ldots, y_s\}$ ($s = \dim R$) une telle famille. Puisque $\{y_2 + (x), \ldots, y_s + (x)\}$

engendre $\mathfrak{n}$, on a (voir 3.1.2) $\dim S \leq \operatorname{emb\,dim} S \leq s - 1 = \dim R - 1$. On a donc montré que $\operatorname{emb\,dim} S = \dim S = n-1$, c'est-à-dire que S est un anneau local régulier de dimension $\dim R - 1$. Par hypothèse de récurrence S est donc intègre, ce qui signifie que (x) est premier.

Comme (x) est premier, il contient un idéal premier minimal, disons $\mathfrak{p}_1$. Soit alors $y \in \mathfrak{p}_1$. Il existe $a \in R$ tel que $y = ax$, et comme $x \notin \mathfrak{p}_1$, $a \in \mathfrak{p}_1$. On en déduit que $\mathfrak{p}_1 \subseteq x\mathfrak{p}_1$ et, puisque $x \in \mathfrak{m}$, il s'ensuit que $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{p}_1$. Le lemme de Nakayama montre alors que $\mathfrak{p}_1 = (0)$. Ainsi, les idéaux premiers minimaux de R se réduisent à (0) et R est intègre. [18] ∎

Proposition 3.1.6 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$.*
1. Si R est régulier, pour $1 \leq i \leq n$, $R/(x_1, \ldots, x_i)$ est un anneau local régulier.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) R est régulier ;
(ii) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une R-suite.

Preuve : 1. Supposons R régulier (il est alors de dimension n). Pour $1 \leq i \leq n$, d'après 7.3.3, $\dim R/(x_1, \ldots, x_i) \geq n - i$. Comme par ailleurs, $R/(x_1, \ldots, x_i)$ est local d'idéal maximal engendré par les classes modulo $(x_1, \ldots, x_i)$ de $x_{i+1}, \ldots, x_n$, on a (voir 3.1.2) $\dim R/(x_1, \ldots, x_i) \leq \operatorname{emb\,dim} R/(x_1, \ldots, x_i) \leq n - i$. Ainsi, $n - i = \dim R/(x_1, \ldots, x_i) = \operatorname{emb\,dim} R/(x_1, \ldots, x_i)$ c'est-à-dire que $R/(x_1, \ldots, x_i)$ est un anneau local régulier de dimension $n - i$.
2. Compte tenu du premier point et du théorème 3.1.5, si l'on suppose R régulier, R et les quotients successifs $R/(x_1, \ldots, x_i)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ sont intègres. L'implication ((i) $\Longrightarrow$ (ii)). L'implication ((ii) $\Longrightarrow$ (i)) est claire : si l'on suppose que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une R-suite, d'après 7.3.7, on a $\dim R/(x_1, \ldots, x_n) = \dim R - n$, d'où l'on déduit que $\dim R = n$ puisque $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'idéal maximal de R. Il s'ensuit que R est régulier. ∎

Le corollaire suivant donne une nouvelle caractérisation des anneaux locaux réguliers.

Corollaire 3.1.7 – [19] *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. Alors R est régulier si et seulement si $\mathfrak{m}$ peut-être engendré par une suite régulière.*

Preuve : Si R est régulier, la proposition 3.1.6 montre que tout système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$ est une R-suite. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{m}$ soit engendré par une R-suite $\{x_1, \ldots, x_r\}$. D'après 7.3.7, on a $0 = \dim R/(x_1, \ldots, x_r) = \dim R - r$. D'où $r = \dim R \leq \operatorname{emb\,dim} R \leq r$. On en déduit la régularité de R. ∎

Corollaire 3.1.8 – *Un anneau local régulier est Cohen-Macaulay.*

Preuve : Soir $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier ; 3.1.7 montre qu'il existe une suite régulière $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui engendre $\mathfrak{m}$. Ainsi, d'après 1.2.15, $n \leq \operatorname{prof} R \leq \dim R \leq n$. Donc $\operatorname{prof} R = \dim R$, c'est-à-dire que R est Cohen-Macaulay. ∎

Remarque 3.1.9 – Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier de dimension n. La tradition veut que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ soit appelé un *système régulier de paramètres*. Il convient de remarquer, pour éviter les confusions, que si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est une suite régulière, c'est un système de paramètres de R (voir §7.3) qui cependant n'est pas

[18] Notons que l'on a démontré, au passage, que dans un anneau local noethérien, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier qui est contenu strictement dans un idéal premier principal, alors $\mathfrak{p}$ est nul.
[19] Voir [Ei ; Exercise 18.2].

nécéssairement un système régulier de paramètres. Par exemple, l'anneau $\mathbb{C}[X]_{(X)}$ est un anneau local régulier de dimension 1, $\{X^2\}$ est une suite régulière qui est un système de paramètres et qui pourtant n'est pas un système régulier de paramètres puisqu'elle n'engendre pas $X\mathbb{C}[X]_{(X)}$.

On termine cette section par une définition pratique dans la suite.

Définition 3.1.10 – [20] *Un anneau nothérien R est dit régulier si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, $R_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local régulier.*

Corollaire 3.1.11 – *Un anneau nothérien régulier est Cohen-Macaulay.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de 3.1.8. ∎

3.2 Quotients d'anneaux Cohen-Macaulay par des suites régulieres.

Dans cette sous-section, on revient brièvement sur des résultats déja mentionnés pour les mettre d'avantage en évidence. On exhibe ainsi une classe d'anneaux Cohen-Macaulay qui ne sont pas nécéssairement réguliers.

Compte tenu de la proposition 2.1.5, si R est un anneau noethérien Cohen-Macaulay et si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite R-régulière, l'anneau quotient est encore Cohen-Macaulay. Pour mettre cette propriété en perspective, notons qu'elle n'a pas d'équivalent si l'on remplace *Cohen-Macaulay* par *régulier*. En effet, soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille minimale de générateurs de $\mathfrak{m}$, la proposition 3.1.6 montre que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une suite régulière et que, pour $1 \leq i \leq n$, $R/(x_1, \ldots, x_i)$ est un anneau local régulier. Cependant, si $\{y_1, \ldots, y_s\}$ est une suite régulière quelconque de R, l'anneau $R/(y_1, \ldots, y_s)$ n'est pas, à priori, un anneau local régulier. Par exemple l'anneau $\mathbb{C}[X]_{(X)}/X^2\mathbb{C}[X]_{(X)}$ (est Cohen-Macaulay car de dimension nulle mais) n'est pas régulier.

Exemple 3.2.1 –
1. Soit R un anneau Cohen-Macaulay (par exemple un corps) et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une suite régulière de l'anneau de polynômes $R[X_1, \ldots, X_n]$, $R[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n\})$ est Cohen-Macaulay. En effet, $R[X_1, \ldots, X_n]$ est Cohen-Macaulay d'après 2.2.1, et donc $R[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n\})$ est Cohen-Macaulay d'après 2.1.5.

Ainsi, les anneaux suivants (qui sont tous des anneaux de fonctions régulières de variétés algébriques affines singulières) sont singuliers mais Cohen-Macaulay : $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ (cusp) ; $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$; $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2)$.
2. Plus généralement, si R est un anneau régulier et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une suite R-régulière, alors $R/(x_1, \ldots, x_n)$ est Cohen-Macaulay en vertu de 3.1.11 et 2.1.5.

Remarque 3.2.2 [21] – Les exemples mentionnés en 3.2.1 font partie d'une classe d'anneaux appelés (localement) intersection complète.
1. Un anneau local noethérien R est intersection complète si sa completion $\hat{R}$ est isomorphe au quotient d'un anneau local régulier S par un idéal engendré par une suite régulière $x_1, \ldots, x_n$ dans S ([BH ; 2.3.1]). En particulier, si R est un anneau local isomorphe au quotient d'un anneau

[20] Cette définition est celle de [Ma ; §19 p. 157]. Notons que, comme mentionné dans [Ma ; §19 p. 157], la régularité de $R_{\mathfrak{m}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R équivaut à la régularité de $R_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R.

[21] À préciser

local régulier S par un idéal engendré par une suite régulière $x_1, \ldots, x_n$ dans S, R est intersection complète ([BH ; 2.3.3]). Les anneaux (locaux) intersection complète sont Cohen-Macaulay (c'est clair d'après le point 2 de 3.2.1 et [BH : 2.1.8]).
2. Si R est un anneau noethérien, on dit qu'il est localement intersection complète si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, l'anneau local $R_{\mathfrak{m}}$ est intersection complète. Il est clair alors que tout anneau localement intersection complète est Cohen-Macaulay.

4 Formule de Auslander-Buchsbaum.

4.1 Profondeur et dimension projective – formule de Auslander-Buchsbaum.

Dans cette sous-section, on démontre la très importante formule de Auslander-Buchsbaum ; le cheminement suivit est celui de [W ; §4.4] (voir aussi [Pe, Chap. 17] et [BH ; §1.3]).

Rappelons que, si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local et M un R-module de type fini, alors M est projectif si et seulement si il est libre (voir 7.5).

Notons le point suivant qui clarifie les hypothèses du lemme 4.1.1. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, dire que $\operatorname{prof} R = 0$ revient à dire que tous les éléments de $\mathfrak{m}$ sont des diviseure de 0 de R, c'est-à-dire que la réunion des idéaux premiers associés du R-module R est $\mathfrak{m}$ (voir 7.1.2). D'après le lemme d'évitement, ceci revient encore à dire que $\mathfrak{m}$ est un idéal premier associé de R : $\operatorname{prof} R = 0$ si et seulement si $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$.

Lemme 4.1.1 – [22] *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local tel que $prof R = 0$. Si M est un R-module de type fini, alors* $\operatorname{projdim} M = 0$ *ou* $\operatorname{projdim} M = \infty$.

Preuve : Supposons qu'il existe un R-module M de type fini et tel que $0 < d = \operatorname{projdim} M < \infty$ et soit $0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\phi_d} P_{d-1} \xrightarrow{\phi_{d-1}} P_{d-2} \dots P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ une résolution projective de M. Alors, le syzygie $N = K_{d-2} = \ker \phi_{d-2}$ de M est de type fini et de dimension projective 1 :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & & 0 \\
0 \arrow[dr] & & & K_{d-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & M \arrow[ur] & \\
 & P_d \arrow[r, "\phi_d"] & P_{d-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "\phi_{d-1}"] & & P_{d-2} \arrow[r, "\phi_{d-2}"] & \dots & P_1 \arrow[r, "\phi_1"] & P_0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

D'après 7.5.1, N peut-être engendré par $n = \dim_k N/\mathfrak{m}N$ éléments. Si $u_1, \dots, u_n$ engendre N, on dispose d'une résolution libre minimale (voir §7.5)

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\phi} R^n \xrightarrow{\epsilon} N \longrightarrow 0$$

où $P \neq 0$ et $\epsilon(a_1, \dots, a_n) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$. Comme cette résolution est libre minimale, on a $\phi(P) \subseteq \mathfrak{m}R^n$ (voir §7.5). Par ailleurs, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$; soit donc $s \in R$ tel que $\mathfrak{m} = \{r \in R \mid rs = 0\}$. On a alors $\phi(sP) = s\phi(P) \subseteq s\mathfrak{m}R^n = 0$; ainsi, $\phi(sP) = 0$ puis $sP = 0$ ϕ étant injective. Mais le module non nul P est libre (voir 7.5.2), cette dernière équation est donc absurde. ∎

Théorème 4.1.2 –[23] **Auslander-Buchsbaum**
Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un R-module non nul, de type fini. Si $\operatorname{projdim} M < \infty$, *alors*

$$\operatorname{projdim}_R M + \operatorname{prof} M = \operatorname{prof} R.$$

[22] C'est [W ; 4.4.14].

[23] La preuve que j'ai suivie est essentiellement celle de [W ; 4.4.15]. Néanmoins, pour une raison qui m'échappe, la dernière partie de la preuve en question (le cas $\operatorname{prof} R \neq 0$, $\operatorname{prof} M \neq 0$) utilise de façon artificielle l'énoncé [W ; 4.3.14] (lui-même corollaire de [W ; 4.3.3]). Weibel raisonne en effet par récurrence sur $\operatorname{prof} M$, $\operatorname{prof} R$ étant fixé. L'argument présenté ici utilise un récurrence sur le couple $(\operatorname{prof} R, \operatorname{prof} M)$ qui évite le recours à ces énoncés et utilise donc uniquement 7.5.5. Ce point de vue plus direct est aussi celui de [P] et [BH].

Preuve : On procède par double récurrence sur $\operatorname{prof} R$ et $\operatorname{prof} M$.
Supposons $\operatorname{prof} R = 0$; alors d'après 4.1.1 M est projectif et donc libre d'après 7.5.2. Il est clair alors que $\operatorname{prof} M = 0$ car tout élément de $\mathfrak{m}$ étant un diviseur de zéro de R (cf. $\operatorname{prof} R = 0$), *a fortiori* tout élément de $\mathfrak{m}$ est un diviseur de zéro de M. Dans ce cas, l'égalité est donc vérifiée.

Supposons $\operatorname{prof} R \neq 0$ et $\operatorname{prof} M = 0$ (donc $\mathfrak{m}$ est dans $\operatorname{Ass} M$ et contient des éléments R-réguliers). On peut alors choisir $x \in \mathfrak{m}$ R-régulier et $0 \neq a \in M$ tel que $\mathfrak{m}a = 0$. Soit

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^m \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \tag{2}$$

une suite exacte courte où $m = \dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$; cette suite exacte courte est donc un début de résolution libre minimale de M (voir 7.5). Notons que M n'est pas un R-module libre, sans quoi on devrait avoir $\operatorname{prof} M \neq 0$ puisque $\operatorname{prof} R \neq 0$; ainsi, on a nécéssairement $K \neq 0$. Soit $u \in R^m$ tel que $\epsilon(u) = a$. On a bien sûr $\mathfrak{m}u \subseteq K$ et donc $xu \in K$ et $\mathfrak{m}xu \subseteq xK$. Cependant, $xu \notin xK$. En effet, comme x est R-régulier il est aussi R^m-régulier ; donc si l'on suppose $xu \in xK$, on doit avoir $u \in K$, ce qui est faux. Par suite, $\mathfrak{m}$ est l'annulateur de $xu + xK \in K/xK$. C'est donc un idéal premier associé de K/xK, de sorte que $\operatorname{prof} K/xK = 0$ (ici K/xK est considéré indifféremment comme R- ou R/x-module). Comme x est K-régulier (car R^m-régulier) et R-régulier, on a $\operatorname{projdim}_{R/xR} K/xK = \operatorname{projdim}_R K$ d'après 7.5.5. Enfin, on a remarqué ci-dessus que $K \neq 0$. Il s'ensuit que $\operatorname{projdim} K = \operatorname{projdim} M - 1$; en effet la suite exacte (2) est un début de résolution libre minimale de M ce qui montre l'égalité requise en utilisant les résultats de 7.5, et en particulier 7.5.4 [24]. Un argument de récurrence sur $\operatorname{prof} R$, (sous couvert de $\operatorname{prof} M = 0$) montre alors que

$$\operatorname{prof} R - 1 \overset{1.2.11}{=} \operatorname{prof} R/xR \overset{\text{H.R.}}{=} \operatorname{projdim}_{R/xR} K/xK \overset{7.5.5}{=} \operatorname{projdim} K = \operatorname{projdim} M - 1.$$

A ce stade, on a montré le résultat lorsque $\operatorname{prof} M = 0$. Supposons à présent que $\operatorname{prof} R \neq 0$ et $\operatorname{prof} M \neq 0$. Si l'on suppose que

$$(\cup \operatorname{Ass} R) \cup (\cup \operatorname{Ass} M) = \mathfrak{m},$$

alors $\mathfrak{m}$ est un idéal premier associé soit pour M soit pour R, ce qui contredit $\operatorname{prof} R \neq 0$ et $\operatorname{prof} M \neq 0$. Ainsi, il existe x dans $\mathfrak{m}$ qui est R-régulier et M-régulier. On a alors $\operatorname{prof} M/xM = \operatorname{prof} M - 1$ et $\operatorname{prof} R/(x) = \operatorname{prof} R - 1$ (1.2.11 (e)). On peut alors procéder par récurrence sur $(\operatorname{prof} R, \operatorname{prof} M)$: l'hypothèse de récurrence assure que $\operatorname{prof}_{R/(x)} R/(x) = \operatorname{prof}_{R/(x)} M/xM + \operatorname{projdim}_{R/(x)} M/xM$. De plus, d'après 7.5.5, on a $\operatorname{projdim}_{R/(x)} M/xM = \operatorname{projdim}_R M$. Ainsi, on a

$$\operatorname{prof}_R R = \operatorname{prof} R/(x) + 1 = \operatorname{prof} M/xM + 1 + \operatorname{projdim}_{R/(x)} M/xM = \operatorname{prof}_R M + \operatorname{projdim}_R M.$$

Ceci clos la démonstration. ∎

Remarque 4.1.3 – Une preuve alternative de la formule de Auslander et Buchsbaum utilisant le complexe de Koszul est proposée dans [Ei ; 19.9].

4.2 Propriété de Cohen-Macaulay et perfection.

Dans la présente section, on définit la notion de module parfait.[25]

[24] Alternativement, on peut utiliser directement le résultat plus général de [Pe ; lemme 17.13].

[25] Cette définition est extraite de [BH ; §1.4]. J'ignore le reste du contenu du §1.4 de [BH] car à ce stade de la rédaction son utilité pour la suite de cet exposé n'est pas claire.

Soit R un anneau noethérien et M un R-module de type fini non nul. On a vu, à la remarque 1.2.7, que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\}$ est non vide et, en 1.2.13, on a défini le grade de M par $\mathrm{grade}\,(M) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\}$ si $M \neq 0$. (Par convention, si $M = 0$, $\mathrm{grade}\,(M) = \infty$.) Comme les groupes $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)$, $i \in \mathbb{N}$, peuvent être calculés à l'aide d'une résolution projective de M, il est clair que, pour tout R-module M non nul, on a $\mathrm{grade}\,(M) \leq \mathrm{projdim}\, M$.

Définition 4.2.1 – *Soit R un anneau noethérien. Un R-module M non nul et de type fini est dit parfait si* $\mathrm{grade}\,(M) = \mathrm{projdim}\, M$.

Le théorème suivant donne un moyen de démontrer que certains anneaux sont Cohen-Macaulay.

Lemme 4.2.2 – *Soit R un anneau noethérien et M un R-module de type fini. Si M est parfait, alors pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$, $M_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module parfait.*

Preuve : Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$, on a

$$\mathrm{grade}\, M \leq \mathrm{grade}\, M_\mathfrak{p} \leq \mathrm{projdim}\, M_\mathfrak{p} \leq \mathrm{projdim}\, M.$$

En effet, la première inégalité se déduit immédiatement de 1.1.2, la seconde à été mentionnée en debut de sous-section et la dernière est un fait standard d'algèbre homologique (le foncteur $- \otimes R_\mathfrak{p}$ est exact et envoie les projectifs sur des projectifs). L'assertion en découle aussitôt. ∎

Théorème 4.2.3 –[26] *Soit R un anneau noethérien Cohen-Macaulay et M un R-module de type fini et de dimension projective finie.*
1. Si M est parfait, alors il est Cohen-Macaulay.
2. Si R est local, M est parfait si et seulement si il est Cohen-Macaulay.

Preuve : Si M est parfait, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ du support de M, $M_\mathfrak{p}$ est parfait d'après 4.2.2. Ainsi, on peut se limiter au cas où R est local. Soit alors $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local et M un R-module de type fini et de dimension projective finie ; la formule de Auslander-Buchsbaum (voir 4.1.2) assure que $\mathrm{projdim}\,_R M + \mathrm{prof}\, M = \mathrm{prof}\, R$. Mais, en appliquant le théorème 2.1.6 avec $I = \mathrm{Ann}\, M$, on a $(\mathrm{grade}\, M =)\mathrm{grade}\, R/\mathrm{Ann}\, M = \mathrm{ht}\,\mathrm{Ann}\, M$ et $\dim R/\mathrm{Ann}\, M + \mathrm{ht}\,\mathrm{Ann}\, M = \dim R$. Il s'ensuit que $\dim M - \mathrm{prof}\, M = \dim R/\mathrm{Ann}\, M - \mathrm{prof}\, M = \dim R - \mathrm{ht}\,\mathrm{Ann}\, M - \mathrm{prof}\, M = \mathrm{prof}\, R - \mathrm{grade}\, M - \mathrm{prof}\, M = \mathrm{projdim}\,_R M - \mathrm{grade}\, M$. ∎

4.3 Un résultat concernant le cas gradué.

Dans cette sous-section, on exploite les résultats liés à la perfection pour obtenir un énoncé analogue à celui du théorème 4.2.3 lorsque l'anneau considéré est un anneau de polynômes.

Lemme 4.3.1 – [27] *Soit k un corps, $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$ et M un R-module gradué de type fini. Alors,* $\mathrm{projdim}\, M_\mathfrak{m} = \mathrm{projdim}\, M$ *et* $\mathrm{grade}\, M_\mathfrak{m} = \mathrm{grade}\, M$.

Preuve : On donne seulement des indication de preuve.[28] Pour démontrer la première égalité, on utilise la version graduée d'une résolution libre minimale de M. Les résultats présentés en 7.5

[26] Le corollaire 2.2.10 de [BH] est à garder en mémoire. Pour le moment, il ne me semble pas indispensable.
[27] C'est une partie de [BH ; 1.5.15]. On peut énoncer ce résultat dans le cadre des algèbres positivement graduées connexes.
[28] Voir si il faut détailler.

s'étendent au cas local-gradué. Partant d'une résolution libre graduée minimal de M, on obtient en appliquant le foncteur $-\otimes R_{\mathfrak{m}}$ une résolution libre minimale du $R_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$. Ceci montre que $\operatorname{projdim} M_{\mathfrak{m}} = \operatorname{projdim} M$. Pour obtenir la seconde égalité, on utilise le fait que $-\otimes R_{\mathfrak{m}}$ est fidèlement exacte. Pour les détails concernant cette preuve, on peut se reporter à [BH ; 1.5.15].■

Théorème 4.3.2 –[29] [30] *Soit k un corps, $R = k[X_1, \dots, X_n]$, $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$ et M un R-module gradué de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) M est Cohen-Macaulay ;
(ii) M est parfait ;
(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ est Cohen-Macaulay ;
(iv) $M_{\mathfrak{m}}$ est parfait.

Preuve : Rappelons que, d'après 2.2.1, l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ est Cohen-Macaulay ; ainsi, l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) se déduit de 4.2.3. Il est clair que l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ est local régulier : par exemple, la suite $\{X_1, \dots, X_n\}$ est régulière dans $k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ et engendre son unique idéal maximal (voir 1.1.2 et 3.1.7). Ainsi, le théorème 4.2.3 joint au corollaire 3.1.8 assure l'équivalence de (iii) et (iv). De plus, 2.1.5 assure que (i) implique (iii). Enfin, l'équivalence de (ii) et (iv) se déduit immédiatement de 4.3.1. ■

Remarque 4.3.3 – Les énoncés 4.3.1 et 4.3.2 restent vrais si l'on considère sur R la graduation obtenue en assignant à X_i, $1 \le i \le n$, un degré quelconque de $\mathbb{N}^*$. Pour des précisions à ce sujet, on peut consulter [BH ; 1.5.15] et le paragraphe qui précède [BH ; 2.2.15].

[29] C'est [BH ; 2.2.15]. L'utilisation qui sera faite de cet énoncé se limite à l'équivalence entre (i) et (iii). Ainsi, on pourrait éviter de passer par la notion de perfection en utilisant [BH ; 2.1.27]. Cependant, pour le moment je n'ai pas de preuve de ce résultat.

[30] Il serait bien de dégager un corollaire du présent théorème concernant le cas des algèbres graduées du type : si R est une (bonne) algèbre graduée d'unique idéal maximal homogène $\mathfrak{m}$, alors R est C.M. ssi $R_{\mathfrak{m}}$ l'est. Un tel énoncé (qui devrait être une conséquence plus ou moins immédiate du présent théorème) simplifierait la clarification de la preuve de 5.2.

5 Anneaux déterminantiels.

Cette section est essentiellement tirée de [BV]. Il s'agit de mettre en évidence un exemple d'utilisation des notions introduites à la section 4 (et en particulier le théorème 4.3.2) pour montrer que les anneaux déterminantiels sont Cohen-Macaulay.

Si k est un corps et m et n deux entiers de $\mathbb{N}^*$; on peut considérer l'anneau de polynômes $k[X_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n]$ et sa matrice générique $X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Pour simplifier, on pose $k[X_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m] = k[X]$. Pour $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$, on définit alors l'idéal $I_t(X)$ engendré par les mineurs $t \times t$ de X et on note $R_t(X) = k[X]/I_t(X)$ l'anneau résiduel. Un tel anneau est appelé un anneau déterminantiel. Les anneaux déterminantiels sont des anneaux d'invariants pour une certains action du groupe GL_t sur la variété algébrique affine $M_{m,t} \times M_{t,n}$. Le second théorème fondamental de la théorie des invariants pour cette action montre que le noyau du morphisme d'algèbre

$$\begin{array}{ccc} k[X_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n] & \longrightarrow & k[Y_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq t] \otimes k[Z_{ij}, 1 \leq i \leq t,\ 1 \leq j \leq n] \\ X_{ij} & \mapsto & \sum_{k=1}^{t} Y_{ik} \otimes Z_{kj} \end{array}$$

est $I_t(X)$. Il s'ensuit aussitôt que cet idéal est premier.

Comme on va le voir ci-dessous, les anneaux déterminantiels sont Cohen-Macaulay. Il existe plusieurs preuves de cette propriété. On va ici indiquer les étapes essentielles de l'une d'entre elles en traitant un cas particulier.

Lemme 5.1 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local.* [31]
1. Si $x \in \mathfrak{m}$ est un élément régulier, alors R/xR est Cohen-Macaulay si et seulement si R l'est.
2. Soient I et J deux idéaux tels que $\dim R/I = \dim R/J = \dim R$, $\dim R/(I+J) = \dim R - 1$ *et* $I \cap J = (0)$. *Si on suppose que R/I et R/J sont Cohen-Macaulay, alors R est Cohen-Macaulay si et seulement si $R/(I+J)$ l'est.*

Preuve : 1. C'est clair d'après 7.3.7 et 1.2.11.
2. On dispose d'une suite exacte de R-modules [32]

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/(I+J) \longrightarrow 0. \qquad (3)$$

D'après 1.2.10 appliqué à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow R/I \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/J \longrightarrow 0,$$

et compte tenu de $\operatorname{prof} R/I = \dim R/I = \dim R = \dim R/J = \operatorname{prof} R/J$, on a $\operatorname{prof}(R/I \oplus R/J) \geq \dim R$ et $\operatorname{prof} R/I \geq \min\{\operatorname{prof}(R/I \oplus R/J), \dim R + 1\}$. Donc, $\operatorname{prof}(R/I \oplus R/J) = \dim R$. Appliquons 1.2.10 à (3). Si R est Cohen-Macaulay, alors $\operatorname{prof} R/I+J \geq \min\{\operatorname{prof} R - 1, \dim R\} = \dim R - 1 = \dim R/I+J$; ainsi, $R/I+J$ est Cohen-Macaulay. Réciproquement, Si $R/I+J$ est Cohen-Macaulay, il vient $\operatorname{prof} R \geq \min\{\dim R, \operatorname{prof} R/I+J+1\} = \min\{\dim R, \dim R/I+J+1\} = \dim R$; ainsi, R est Cohen-Macaulay. La preuve est complète. ∎

[31] Remarquons que, dans cet énoncé, *Cohen-Macaulay* signifie indifféremment *Cohen-Macaulay comme anneau* ou *Cohen-Macaulay comme R-module* (voir 2.1.2). Dans la preuve, par contre, tous les anneaux sont considérés comme des R-modules.

[32] Pour tout anneau R et tout couple I, J d'idéaux de R, on peut considérer les morphismes de R-modules $R/(I \cap J) \longrightarrow R/I \oplus R/J$, $a + I \cap J \mapsto (a + I, -a + J)$ et $R/I \oplus R/J \longrightarrow R/I + J$, $(a + I, b + J) \mapsto a + b + I + J$. On dispose ainsi d'un complexe $0 \longrightarrow R/(I \cap J) \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/I + J \longrightarrow 0$ qui est exacte car, si pour $a, b \in R$ on a $a + b \in I + J$, alors en posant $a + b = x + y$, $x \in I$, $y \in J$, on a $(a + I, b + J) = (c + I, -c + J)$ où $c = a - x$.

Corollaire 5.2 – [33] *Soit k un corps et A la k-algèbre graduée $A = k[X_1, \ldots, X_n]/L$ où L est un idéal homogène de $k[X_1, \ldots, X_n]$.*
1. Si $x \in A$ est un élément homogène de degré non nul et non diviseur de zéro, alors A/xA est Cohen-Macaulay si et seulement si A l'est.
2. Soient I et J deux idéaux homogènes tels que

$$\dim A/I = \dim A/J = \dim A,\ \dim A/(I+J) = \dim A - 1 \text{ et } I \cap J = (0).$$

Si on suppose que A/I et A/J sont Cohen-Macaulay, alors A est Cohen-Macaulay si et seulement si $A/(I+J)$ l'est.

Preuve : Pour tout idéal homogène H de $k[\underline{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$, la k-algèbre graduée $k[\underline{X}]/H$ est un $k[\underline{X}]$-module gradué de type fini. De plus, $k[\underline{X}]/H$ est Cohen-Macaulay en tant qu'anneau (c'est-à-dire en tant que module sur lui-même) si et seulement si il l'est en tant que $k[\underline{X}]$-module (voir 2.1.2). On est donc en position d'exploiter les résultats du théorème 4.3.2 qui conduit à localiser par $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. Le résultat découle donc du lemme 5.1, et ce compte tenu de [Ei ; 13.7] qui permet de calculer la dimension de ces anneaux localisés (c'est la même que celle des anneaux de départ puisqu'ils sont gradués-locaux). ∎

Exemple 5.3 – On reprend les notations du début de cette sous-section : k est un corps et m et n deux entiers tels que $m, n \geq 2$. On considére l'anneau de polynômes $k[X] = k[X_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ et $R_2(X) = k[X]/I_2(X)$ l'anneau résiduel obtenu en passant au quotient modulo l'idéal $I_2(X)$ engendré par les mineurs 2×2 de la matrice générique $X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La classe modulo $I_2(X)$ d'un générateur X_{ij} est notée x_{ij}. On va indiquer les étapes essentielles permettant de montrer que l'anneau $R_2(X) = k[X]/I_2(X)$ est Cohen-Macaulay. On pose $x_{ij} = X_{ij} + I_2(X)$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
1. On considère les idéaux $L_2(X) = (I_2(X), X_{1,1}, \ldots, X_{1n})$ et $C_2(X) = (I_2(X), X_{1,1}, \ldots, X_{m1})$ de $k[X]$. On peut alors montrer que $L_2(X) \cap C_2(X) = (X_{11}, I_2(X))$, et que X_{11} est régulier modulo $I_2(X)$.
2. Le calcul de la dimension de $R_2(X)$ est facile : on dispose d'un isomorphisme $(k[X]/I_2(X))_{x_{11}} \cong k[X]_{X_{11}}/I_2(X)k[X]_{X_{11}}$. La description de $k[X]_{X_{11}}/I_2(X)k[X]_{X_{11}}$. On montre immédiatement que $k[X]_{X_{11}}/I_2(X)k[X]_{X_{11}}$ est isomorphe au sous-anneau de $k[X]_{X_{11}}$ engendré par $X_{11}^{\pm 1}$, X_{1j} pour $1 \leq j \leq n$ et X_{i1} pour $1 \leq i \leq m$. Donc, compte tenu de [Ei ; Chap.8, Theo.A p.223], $\dim R_2(X) = \dim R_2(X)_{x_{11}} = m + n - 1$.
3. On montre, à preésent, que $R_2(X)$ est Cohen-Macaulay. Pour ce faire, on procède par récurrence sur $m + n$. Le premier cas est celui où $m + n = 4$. Alors, $I_2(X)$ est un idéal principal engendré par un élément régulier d'un anneau de polynômes en 4 indéterminées. On peut alors utiliser (par exemple) le premier point de 5.2 pour conclure. Soit à présent un couple (m, n) quelconque. On pose $R = R_2(X)/(X_{11})$; compte tenu du premier point de 5.2, $R_2(X)$ est Cohen-Macaulay si et seulement si R l'est. Les images homomorphes de $L_2(X)$ et $C_2(X)$ dans R sont respectivement notées l et c. Ainsi, d'après 1, $l \cap c = (0)$. Comme $R/l \cong R_2(X)/L_2(X)$, on a $\dim R/l = m + n - 2$; en effet, il est clair que $R_2(X)/L_2(X)$ est isomorphe à un anneau déterminantiel associé au mineurs 2×2 d'une matrice $m, n - 1)$. De même $\dim R/c = m + n - 2$ et $\dim R/(c + l) = m + n - 3$. Enfin, compte tenu de [Ei ; 13.11], $\dim R = m + n - 2$. On est dans les hypothèses du second point de 5.2 qui permet de conclure par récurrence que R est Cohen-Macaulay.

[33] C'est une version affaiblie de [BV , lemme 5.15] qui est suffisante pour nos besoins. La version plus générale de ce lemme telle qu'elle figure dans [BV , lemme 5.15] se prouve en fait de façon identique compte tenu de la remarque qui précède l'énoncé de [BH ; 2.2.15]. Cependant, elle nécéssite une version plus générale de [BH ; 2.2.15].

Remarque 5.4 – L'exemple 5.3 montre que pour $t = 2$, $R_t(X)$ est Cohen-Macaulay. En fait, les anneaux $R_t(X)$ sont Cohen-Macaulay pour tout t. Il existe plusieurs preuves de se résultat.
1. La première (historiquement) est due à Eagon et Hochster. Elle utilise la notion de système principal de radicaux. Elle utilise un argument de récurrence qui repose sur 5.2. La preuve du cas $t = 2$ donnée en 5.3 est un cas (très) particulier de cette preuve. Pour des références concernant cette preuve, on peut consulter [BV ; chap.12].
2. Une autre preuve repose sur le fait que les anneaux déterminantiels sont des *algèbres avec loi de redressement*. En fait, en utilisant à nouveau 5.2, on peut montrer que de telles algèbres sont Cohen-Macaulay dès que l'anneau de base l'est (voir [BV : 5.14]). Cette preuve semble due à Eisenbud (voir [BV : chap.5, comments and references]).[34]
3. Comme on l'a vu en début de section, $R_t(X)$ est l'anneau d'invariants d'une certaine action du groupe $GL_t(k)$ sur un anneau de polynômes en $t(m+n)$ indéterminées. Ainsi, en caractéristique 0, $GL_t(k)$ étant linéairement réductif, on peut appliquer le théorème de Hochster et Roberts (voir [BH ; 6.5.1 et 6.5.3]) qui montre que $R_t(X)$ est Cohen-Macaulay.

[34] Il me semble que la première preuve est en fait une version explicite de celle liée au contexte beaucoup plus général des algèbres avec loi de redressement.

6 Invariants polynomiaux sous l'action de groupes finis.

Soit k un corps et $k[\underline{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$ un anneau de polynôme en n indéterminées. On considère un groupe fini G dont l'ordre est inversible dans k et qui agit sur $k[\underline{X}]$ par automorphismes gradués d'algèbre (c'est-à-dire que l'action de tout $g \in G$ fixe $kX_1 \oplus \ldots \oplus kX_n$). Dans cette section, le but est de montrer que l'anneau d'invariants $k[\underline{X}]^G$ est Cohen-Macaulay. Rappelons qu'on dispose d'un *opérateur de Reynolds* :

$$\begin{array}{cccc} \rho & : & k[\underline{X}] & \longrightarrow & k[\underline{X}]^G \\ & & P & \mapsto & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.P \end{array}.$$

Il est clair que ρ est un morphisme de $k[\underline{X}]^G$-modules dont la restriction à $k[\underline{X}]^G$ est l'identité. De plus, $k[\underline{X}] = \ker \rho \oplus k[\underline{X}]^G$ (pour tout $P \in k[\underline{X}]$, on a $P = P - \rho(P) + \rho(P)$).

Lemme 6.1 – [35] *Dans les notations précédentes :*
1. $k[\underline{X}]$ est une extension entière de $k[\underline{X}]^G$;
2. $k[\underline{X}]^G$ est une k-algèbre de type fini, en particulier $k[\underline{X}]^G$ est noethérien ;
3. Pour tout idéal I de $k[\underline{X}]^G$, on a $Ik[\underline{X}] \cap k[\underline{X}]^G = I$.
4. Toute suite $k[\underline{X}]$-régulière contenue dans $k[\underline{X}]^G$ est une suite $k[\underline{X}]^G$-régulire.

Preuve : Soit $P \in k[\underline{X}]$; P est racine du polynôme unitaire $\prod_{g\in G}(T - g.P) \in k[\underline{X}][T]$. En outre, les coefficients de $\prod_{g\in G}(T - g.P)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les $g.P$, $g \in G$. Ainsi, il est clair que $\prod_{g\in G}(T - g.P) \in k[\underline{X}]^G[T]$. Ceci montre le premier point. Par ailleurs, on note A la sous-algèbre de $k[\underline{X}]$ engendrée par les coefficients des polynômes $\prod_{g\in G}(T - g.P)$, pour $P = X_1, \ldots, X_n$; on obtient une sous-algèbre de type fini de $k[\underline{X}]$ sur laquelle $k[\underline{X}]$ est un module de type fini. Ainsi, $k[\underline{X}]$ est un A-module nothérien et par suite, son sous A-module $k[\underline{X}]^G$ est aussi noethérien. Le A-module $k[\underline{X}]^G$ est donc de type fini. Il s'ensuit que $k[\underline{X}]^G$ est une algèbre de type fini : le second point est prouvé. Soit I un idéal de $k[\underline{X}]^G$, on a évidemment $Ik[\underline{X}] \cap k[\underline{X}]^G \supseteq I$. Réciproquement, soit $a = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i \in Ik[X] \cap k[X]^G$, avec $a_i \in I$ et $b_i \in k[\underline{X}]$ $(1 \le i \le s)$. On a $a = \rho(a) = \sum_{i=1}^{s} a_i \rho(b_i) \in I$. Le troisième point est donc prouvé. Enfin, soit $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_s\}$ une suite régulière de $k[\underline{X}]$ contenue dans $k[\underline{X}]^G$; supposons que a soit un élément de $k[\underline{X}]^G$ tel que $x_{i+1}a \in (x_1, \ldots, x_i)k[\underline{X}]^G$. Alors, $x_{i+1}a \in (x_1, \ldots, x_i)k[\underline{X}]$. La régularité de $\mathbf{x}$ dans $k[\underline{X}]$ assure que $a \in (x_1, \ldots, x_i)k[\underline{X}]$. Mais alors, compte tenu du troisième point, on a $a \in (x_1, \ldots, x_i)k[\underline{X}] \cap k[\underline{X}]^G = (x_1, \ldots, x_i)k[\underline{X}]^G$. Ceci montre la régularité de $\mathbf{x}$ dans $k[\underline{X}]^G$. ∎

Théorème 6.2 – *Dans les notations précédentes, $k[\underline{X}]^G$ est Cohen-Macaulay.*

Preuve : Comme, d'après 6.1, $k[\underline{X}]^G \subseteq k[\underline{X}]$ est une extension entière d'anneaux noethériens, $\dim k[\underline{X}]^G = n$ (voir [BH ; corollaire A.8]). De plus, $k[X]$ étant muni de sa graduation usuelle par le degré total, G agit par automorphismes gradués ; par suite, un polynôme est invariant si et seulement si chacune de ses composantes homogènes l'est. Il s'ensuit que $k[\underline{X}]^G$ est graduée par la trace de la graduation de $k[\underline{X}]$. Enfin, d'après 6.1, $k[\underline{X}]^G$ est de type fini. La version graduée du lemme de normalisation (voir [BH ; 1.5.17]) appliquée à $k[\underline{X}]^G$ montre alors qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in k[\underline{X}]^G$, homogènes et algébriquement indépendants sur k (et donc en particulier de degré total strictement positif), tels que $k[\underline{X}]^G$ soit une extension entière de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Par transitivité des extensions entières, $k[\underline{X}]$ est une extension entière de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Soit I l'idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ engendré par $x_1, \ldots, x_n$ et $J = Ik[\underline{X}]$; bien sûr l'idéal $k[x_1, \ldots, x_n] \cap J$

[35] Voir le commentaire de [BH] qui précède 6.4.5, [B ; 1.3.1] et [BH ; 6.4.4].

contient I et est un idéal propre de $k[x_1,\ldots,x_n]$ car sinon il contiendrait 1, ce qui est impossible puisqu'il est engendré par $x_1,\ldots,x_n$ qui sont des éléments homogènes de degré strictement positif. Comme I est un idéal maximal de $k[x_1,\ldots,x_n]$, on a $k[x_1,\ldots,x_n]\cap J = I$. Compte tenu de [BH ; corollaire A.8], il s'ensuit que $\dim k[\underline{X}]/J = 0$. Ainsi, d'après [B ; 4.3.4], $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est une suite régulière de $k[\underline{X}]$ et donc de $k[\underline{X}]^G$ d'après 6.1. D'autre part, l'algèbre $k[\underline{X}]^G$ est une algèbre graduée (par le degré total usuel de $k[X]$) de type fini ; soit $\{g_1,\ldots,g_s\}$ une famille de générateurs homogènes de $k[\underline{X}]^G$ (bien sûr, on les choisit de degré total strictement positif, ce qui assure que $g_1,\ldots,g_s\in(X_1,\ldots,X_n)$). Le morphisme surjectif d'algèbre défini par

$$\begin{array}{ccccc}\phi & : & K[Y_1,\ldots,Y_s] & \longrightarrow & k[\underline{X}]^G\subseteq k[X]\\ & & Y_i & \mapsto & g_i\end{array}$$

est gradué si l'on considère sur $K[Y_1,\ldots,Y_s]$ la graduation obtenue en assignant à Y_i le degré de g_i. Notons pour simplifier $\underline{Y}=\{Y_1,\ldots,Y_s\}$. Le morphisme ϕ induit un isomorphisme $K[\underline{Y}]/\ker\phi\cong k[\underline{X}]^G$. On va montrer que $K[\underline{Y}]/\ker\phi$ est un anneau Cohen-Macaulay. Cela revient à montrer que le $k[\underline{Y}]$-module $k[\underline{Y}]/\ker\phi$ est Cohen-Macaulay. Pour $1\leq i\leq n$, soit $y_i\in k[\underline{Y}]$ tel que $\phi(y_i)=x_i$. Soit $1\leq i\leq n$; si on pose $y_i=\alpha_i+z_i$ avec $\alpha_i\in k$ et $z_i\in(Y_1,\ldots,Y_s)$, il vient que $x_i=\phi(y_i)=\alpha_i+\phi(z_i)$. De plus, $\phi(z_i)\in(g_1,\ldots,g_s)\subseteq(X_1,\ldots,X_n)$ et $x_i\in(X_1,\ldots,X_n)$ et ce qui précède conduit donc à $\alpha_i\in(X_1,\ldots,X_n)$, c'est-à-dire $\alpha_i=0$. Ainsi, pour $1\leq i\leq n$, on a $y_i\in(Y_1,\ldots,Y_s)$. Enfin, $\{y_1+ker\phi,\ldots,y_n+ker\phi\}$ est une suite régulière de $K[\underline{Y}]/\ker\phi$ et par suite $\{y_1,\ldots,y_n\}$ est une suite $K[\underline{Y}]/\ker\phi$-régulière (dans $(Y_1,\ldots,Y_s)\subseteq k[\underline{Y}]$). Il s'ensuit que $\{y_1/1,\ldots,y_n/1\}$ est une suite $(K[\underline{Y}]/\ker\phi)_{(\underline{Y})}$-régulière dans $(\underline{Y})\subseteq k[\underline{Y}]_{(\underline{Y})}$ et par conséquent $\operatorname{prof}(K[\underline{Y}]/\ker\phi)_{(\underline{Y})}\geq n$. Par ailleurs (voir 7.3.2), $\dim_{K[\underline{Y}]_{(\underline{Y})}}(K[\underline{Y}]/\ker\phi)_{(\underline{Y})}\leq\dim_{K[\underline{Y}]}K[\underline{Y}]/\ker\phi=\dim K[\underline{Y}]/\ker\phi=\dim k[\underline{X}]^G=n$. Par suite, d'après 1.2.15, le $(K[\underline{Y}])_{(\underline{Y})}$-module $(K[\underline{Y}]/\ker\phi)_{(\underline{Y})}$ est Cohen-Macaulay. Ceci, en vertu de 4.3.2 et 4.3.3, assure que le $K[\underline{Y}]$-module $K[\underline{Y}]/\ker\phi$ est Cohen-Macaulay. ∎

7 Appendice : Rappels utiles d'algèbre commutative.

Cette section présente - en général sans les démontrer – certains résultats classiques d'algèbre commutative utiles dans le présent exposé.

7.1 Idéaux premiers associés et support.

On rappelle quelques points utiles concernant la notion d'idéaux premiers associés et de support. Tous le contenu de cette remarque se trouve dans [Ma, §§4 et 6].
On fixe un anneau R et M un R-module de type fini.

7.1.1 – Le support de M, noté $\operatorname{Supp} M$, est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ tels que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. On a $\operatorname{Supp} M = \mathrm{V}(\operatorname{Ann} M)$.

7.1.2 – Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R est dit associé à M si il existe un élément non nul de M dont $\mathfrak{p}$ soit l'annulateur. L'ensemble des idéaux premiers associés de M est noté $\operatorname{Ass} M$. Il est non-vide : il contient en particulier tout idéal maximal de $\{\operatorname{Ann} m, m \in M \setminus \{0\}\}$. L'ensemble des diviseurs de 0 de M, (c'est-à-dire des éléments de R qui ne sont pas M-régulier) est la réunion des idéaux premiers associés de M :

$$\bigcup_{m \in M \setminus \{0\}} \operatorname{Ann} m := \{x \in R \,|\, \exists m \in M \setminus \{0\}, xm = 0\} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}.$$

7.1.3 – L'ensemble $\operatorname{Ass} M$ est fini,

$$\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Supp} M,$$

et l'ensemble des élément minimaux de $\operatorname{Ass} M$ coïncide avec l'ensemble des élément minimaux de $\operatorname{Supp} M$.

7.1.4 – Rappelons enfin que les idéaux minimaux de $\operatorname{Ass} M$ sont appelés les idéaux premiers associés isolés tandis que les autres sont appelés idéaux premiers plongés. La terminologie se justifie ainsi : il est clair que si $P_1, \ldots, P_r$ sont les éléments minimaux de $\operatorname{Supp} M$, on a $\operatorname{Supp} M = \mathrm{V}(P_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}(P_r)$. Ainsi, les fermés $\mathrm{V}(P_i)$, $1 \leq i \leq r$, sont les composantes irréductibles du fermé $\operatorname{Supp} M$ de $\operatorname{Spec} A$ tandis que, si P est un idéal premier associé non minimal, $\mathrm{V}(P)$ est un fermé de $\operatorname{Supp} M$, plongé dans l'une des composantes irréducibles $\mathrm{V}(P_i)$, $1 \leq i \leq r$.

7.2 Théorème de l'idéal principal de Krull et "réciproque".

Le contenu de ces rappels se trouve dans [BH ; p.412] et [Ma ; 13.5].

7.2.1 – Rappelons le théorème de l'idéal principal de Krull : Soit R un anneau noethérien et $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un idéal de R, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, minimal au-dessus de I, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq n$. En particulier, $\operatorname{ht} I := \inf\{\operatorname{ht} \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R,\ \mathfrak{p} \supseteq I\} \leq n$. De plus, si $I = (x_1, \ldots, x_n)$ est un idéal de hauteur n, alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un famille minimale de générateurs de I et tous les idéaux premiers minimaux au-dessus de I ont (même) hauteur n.

7.2.2 – On dispose d'un sorte de réciproque : Soit R un anneau noethérien et I un idéal propre de hauteur n de R. Alors, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans I tels que, pour $1 \leq i \leq n$, $\operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_i) = i$.

7.3 Dimension et systèmes de paramètres.

Définition 7.3.1 – *Si R est un anneau et M un R-module, la dimension de M, notée* $\dim M$ *(ou* $\dim_R M$ *si il y a un risque de confusion) est la dimension de Krull de $R/\operatorname{Ann} M$.*

Lemme 7.3.2 – *Soit R un anneau, S une partie multiplicative de A et M un A-module ; alors,* $\dim_{R_S} M_S \leq \dim_R M$.

Preuve : Soit $\phi : R \longrightarrow R_S$ le morphisme canonique. Pour I dans R, on note IR_S l'idéal de R_S engendré par $\phi(I)$. Il est clair que $(\operatorname{Ann}_R M)R_S \subseteq \operatorname{Ann}_{R_S} M_S$. Compte tenu de l'isomorphisme $R_S/(\operatorname{Ann}_R M)R_S \cong (R/\operatorname{Ann}_R M)_{\overline{S}}$ ([Ma ; 4.2]), il vient

$$\dim_{R_S} M_S = \dim R_S/\operatorname{Ann}_{R_S} M_S \leq \dim R_S/(\operatorname{Ann}_R M)R_S = \dim(R/\operatorname{Ann}_R M)_{\overline{S}}.$$

Compte tenu de [Ei ; 2.2], on a $\dim(R/\operatorname{Ann}_R M)_{\overline{S}} \leq \dim R/\operatorname{Ann}_R M$. Il s'ensuit que $\dim_{R_S} M_S \leq \dim R/\operatorname{Ann}_R M = \dim_R M$. ∎

Proposition 7.3.3 – (Voir [BH ; A4], [Ei ; 10.9][36].) *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, M un R-module de type fini et $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$. Alors,* $\dim M/(x_1, \ldots, x_r)M \geq \dim M - r$.

Proposition 7.3.4 – *Soit R un anneau et M un R-module de type fini. Si $x \in R$ n'est dans aucun idéal premier minimal au-dessus de* $\operatorname{Ann} M$, *alors* $\dim M/xM \leq \dim M - 1$. *En particulier, si x est M-régulier, alors* $\dim M/xM \leq \dim M - 1$.

Preuve : Il est clair que $\operatorname{Ann}(M/xM) \supseteq (\operatorname{Ann} M, x)$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal au dessus de $\operatorname{Ann}(M/xM)$, alors $\mathfrak{p} \supseteq (\operatorname{Ann} M, x)$. Puisque $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann} M$, il doit contenir un idéal premier $\mathfrak{p}_0$ minimal au-dessus de $\operatorname{Ann} M$. Par hypothèse, $x \notin \mathfrak{p}_0$. On doit donc avoir $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$ (inclusion stricte). A partir de toute chaîne d'idéaux premiers de R commençant par un idéal premier minimal au-dessus de $\operatorname{Ann}(M/xM)$, on peut dont construire une chaîne strictement plus longue d'idéaux premiers de R commençant par un idéal premier minimal au-dessus de $\operatorname{Ann} M$. Ainsi, $\dim M/xM \leq \dim M - 1$. Le fait que ce résultat s'applique en particulier si l'on suppose x M-régulier est une conséquence immédiate de 7.1.2. ∎

La suite de cette sous-section concerne les systèmes de paramètres.

Définition 7.3.5 – (Voir [BH ; Appendix].) *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un R-module de type fini et de dimension n. Un système de paramètre est une famille $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{m}$ telle que $M/(x_1, \ldots, x_n)M$ soit artinien, c'est-à-dire telle que* $\dim M/(x_1, \ldots, x_n)M = 0$.[37]

Théorème 7.3.6 – ([BH ; A.4].) *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, M un R-module de type fini et $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$. Alors,* $\dim M/(x_1, \ldots, x_r)M \geq \dim M - r$ *et l'égalité a lieu si et seulement si $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une partie d'un système de paramètres.*

Corollaire 7.3.7 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un R-module de type fini. Si $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathfrak{m}$ est une suite M-régulière, alors*

$$\dim M/(x_1, \ldots, x_r)M = \dim M - r.$$

En particulier, $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une partie d'un système de paramètres.

[36] Dans [Pe ; 15.14] on trouve une version globale qui n'est pas correcte comme le montre [Ei ; Exercice 10.8].

[37] Soit R un anneau noethérien, pour un R-module de type fini, il est équivalent d'être artinien et de longueur finie ([Ma ; p.15]) et d'être de longueur finie et de dimension nulle ([Ei ; 2.14, 2.17]).

Preuve : C'est immédiat d'après 7.3.3, 7.3.4 et 7.3.6. ∎

Remarque 7.3.8 – La présente remarque provient de [Ei ; Exercise 17.3]. Elle donne des caractérisations parallèles pour les suites régulières et les parties de systèmes de paramètres. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local et $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathfrak{m}$:
1. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une suite R-régulière si et seulement si, pour $0 \leq i \leq n-1$, x_{i+1} n'est dans aucun des idéaux premiers associés de $(x_1, \ldots, x_i)$.
2. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une partie d'un système de paramètres pour R si et seulement si, pour $0 \leq i \leq n-1$, x_{i+1} n'est dans aucun des idéaux premiers minimaux au-dessus de $(x_1, \ldots, x_i)$.

7.4 Un lemme sur la hauteur des idéaux.

Lemme 7.4.1 – *Soit R un anneau noethérien, I un idéal de R et $\mathfrak{m}$ un idéal premier au-dessus de I. Alors,* $\operatorname{ht} IR_{\mathfrak{m}} \geq \operatorname{ht} I$.

Preuve : Posons $\operatorname{ht} IR_{\mathfrak{m}} = n$ et soit $\mathfrak{q}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ une suite strictement croissante d'idéaux premiers de $R_{\mathfrak{m}}$ telle que $\mathfrak{q}_n$ soit minimal au-dessus de $IR_{\mathfrak{m}}$. Rappelons ([Ei ; 2.2]) que la contraction des idéaux de $R_{\mathfrak{m}}$ à R est une application injective qui respecte l'inclusion et dont la restriction aux idéaux premiers est une bijection du spectre de $R_{\mathfrak{m}}$ sur les éléments du spectre de R inclus dans $\mathfrak{m}$, l'extension étant sa bijection réciproque. Il s'ensuit que si, pour $0 \leq i \leq n$, $\mathfrak{p}_i$ est la contraction de $\mathfrak{q}_i$, alors $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \mathfrak{p}_n$ est une chaine strictement croissante d'idéaux premiers de R telle que $\mathfrak{p}_n$ contient la restriction de $IR_{\mathfrak{m}}$ et donc I. De plus, si l'on suppose $\mathfrak{p}_n$ non minimal au-dessus de I, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R tel que $I \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_n$. Par extension, on obtient alors une chaine $IR_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{p}_n R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{q}_n$. La minimalité de $\mathfrak{q}_n$ au-dessus de $IR_{\mathfrak{m}}$ et la correspondance bijective dans le cas des idéaux premiers conduit à une contradiction. Ainsi, on a construit une chaine de longueur n dont le dernier idéal est minimal au-dessus de I. Cela montre que $\operatorname{ht} I \leq n$. ∎

7.5 Dimension projective sur les anneaux locaux.

Dans cette sous-section, $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien dont le corps résiduel est noté k.

Lemme 7.5.1 – *Soit M est un R-module de type fini.*
1. Si N est un sous-module de M tel que $M = N + \mathfrak{m}M$, alors $M = N$.
2. Soit $m_1, \ldots, m_s$ une famille d'éléments de M.
2.1. La famille $m_1, \ldots, m_s$ engendre M si et seulement si $m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, m_s + \mathfrak{m}M$ engendre le k-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$.
2.2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la famille $m_1, \ldots, m_s$ engendre M et est de cardinal minimal pour cette propriété ;
(ii) la famille $m_1, \ldots, m_s$ engendre M et est minimale pour cette propriété ;
(iii) $m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, m_s + \mathfrak{m}M$ est une base du k-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$.

Preuve : 1. Soit $\pi : M \to M/N$ la projection canonique ; $\pi(M) = \pi(N + \mathfrak{m}M) = \mathfrak{m}\pi(M)$. Le lemme de Nakayama montre alors que $\pi(M) = M/N = 0$, c'est-à-dire $M = N$.
2.1. Soit $m_1, \ldots, m_s$ une famille d'éléments de M. Si $m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, m_s + \mathfrak{m}M$ engendre le k-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$ et si $N := Rm_1 + \ldots + Rm_s \subseteq M$, alors on a $M = N + \mathfrak{m}M$. Ainsi, d'après le point 1, $M = N$ et donc $m_1, \ldots, m_s$ engendre M. La réciproquement est claire.
2.2 Bien sûr (i) implique (ii). Les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) se déduisent de 2.1. ∎

Proposition 7.5.2 – *Un R-module est projectif si et seulement si il est libre.*

Preuve : Soit P un R-module projectif et $m_1, \ldots, m_r$ une famille de générateurs de P de cardinal minimal, de sorte que $m_1 + \mathfrak{m}P, \ldots, m_r + \mathfrak{m}P$ est une base du k-espace vectoriel $P/\mathfrak{m}P$ (cf. 7.5.1). On considère le morphisme surjectif canonique $\epsilon : R^r \longrightarrow P$ tel que $(a_1, \ldots, a_r) \mapsto a_1m_1 + \ldots + a_rm_r$. Comme P est projectif, on peut scinder ϵ : il existe un morphism $\phi : P \longrightarrow R^r$ tel que $\epsilon \circ \phi = \mathrm{id}_P$. Soit $(a_1, \ldots, a_r) \in \ker \epsilon$; on a $\epsilon((a_1, \ldots, a_r)) = a_1m_1 + \ldots + a_rm_r = 0$. Donc $a_1m_1 + \ldots + a_rm_r + \mathfrak{m}P = (a_1 + \mathfrak{m})(m_1 + \mathfrak{m}P) + \ldots + (a_r + \mathfrak{m})(m_r + \mathfrak{m}P) = 0$. Comme $m_1 + \mathfrak{m}P, \ldots, m_r + \mathfrak{m}P$ est une base de $P/\mathfrak{m}P$, il vient $a_i \in \mathfrak{m}$ pour $1 \leq i \leq r$. Ainsi, $\ker \epsilon \in \mathfrak{m}R^r$. Le scindage précédent assure que $R^r = \phi(P) \oplus \ker \epsilon$ ($\forall x \in R^r$, $x = \phi(\epsilon(x)) + x - \phi(\epsilon(x)) \in \phi(P) + \ker \epsilon$ et $\phi(P) \cap \ker \epsilon = 0$). Il vient alors $R^r = \phi(P) + \mathfrak{m}R^r$. Ainsi, d'après le premier point du lemme 7.5.1, il vient $R^r = \phi(P) \cong P$ (ϕ est injective). ∎

Le lemme 7.5.1 a une très intéressante conséquence : on peut construire une résolution libre (dite minimale) de M qui calcule sa dimension projective. (En fait, cette construction est même unique comme le montre [Ei ; 20.2]). C'est à la description de ce procédé que s'attache le reste de cette sous-section. Pour plus de présision sur ces questions, on peut consulter [Ei ; chap.19,20].

Définition 7.5.3 – *Soit M un R-module de type fini. Une résolution libre minimale de M est une résolution libre*

$$\ldots F_d \xrightarrow{\phi_d} F_{d-1} \xrightarrow{\phi_{d-1}} F_{d-2} \ldots F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de M telle que $\mathrm{Im}\, \phi_i \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, pour $i \geq 1$.

Étant donné un module M de type fini, on peut construire une résolution libre minimale par le procédé suivant. On peut choisir une famille minimale $\{m_1, \ldots, m_s\}$ de générateurs de M (on sait qu'elles ont toutes le même cardinal). Soit alors $F_0 = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_s$ un R-module libre de rang s. On dispose alors d'une projection $\epsilon : F_0 \longrightarrow M$ définie par $e_i \mapsto m_i$. La famille $\{m_1, \ldots, m_s\}$ étant minimale, on sait (lemme 7.5.1) que son image dans la projection canonique $M \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$ est une base de $M/\mathfrak{m}M$. Il s'ensuit aussitôt que $\ker \epsilon \subseteq \mathfrak{m}F_0$. Si l'on note K_0 le noyau de ϵ, on peut appliquer à K_0 le même procédé que pour M. On obtient alors une projection $\epsilon_1 : F_1 \longrightarrow K_0$ telle que $\ker \epsilon_1 \subseteq \mathfrak{m}F_1$. De proche en proche, on obtient une résolution libre de M :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 & \ldots & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \\
\ldots \arrow[dr] & & K_{d-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_{d-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & K_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[ur] & \\
 & F_d \arrow[ur] \arrow[rr, "\phi_d"] & & F_{d-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "\phi_{d-1}"] & & F_{d-2} & \ldots & F_1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\phi_1"] & & F_0 \arrow[ur, "\epsilon"] & &
\end{tikzcd}$$

telle que $\mathrm{Im}\, \phi_i \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, $i \geq 1$.

Cette résolution libre, et en fait toute résolution libre minimale de M, calcule la dimension projective de M comme le montre le corollaire 7.5.4.

Corollaire 7.5.4 –[38] *La dimension projective d'un R-module non nul de type fini est la longueur de toute résolution libre minimale de M.*

Preuve : Soit $\mathcal{F}$ $\ldots F_d \xrightarrow{\phi_d} F_{d-1} \xrightarrow{\phi_{d-1}} F_{d-2} \ldots F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \longrightarrow 0$ une résolution libre minimale de M. Si on lui applique le foncteur $- \otimes_R R/\mathfrak{m}$, on obtient un complexe

$$\ldots F_d \otimes_R R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\phi_d \otimes_R \mathrm{id}} F_{d-1} \otimes_R R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\phi_{d-1} \otimes_R \mathrm{id}} F_{d-2} \otimes_R R/\mathfrak{m} \ldots F_1 \otimes_R R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\phi_1 \otimes_R \mathrm{id}} F_0 \otimes_R R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

[38] C'est une partie de [Ei ; corollary 19.5].

dont les applications $\phi_i \otimes_R \mathrm{id}$ sont toutes nulles. On a donc

$$\forall i \geq 0, \qquad \mathrm{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{m}) = F_i \otimes_R R/\mathfrak{m}. \tag{4}$$

Il est clair alors que $\operatorname{projdim} M$ est infini si et seulement si $\mathcal{F}$ est de longueur infinie (un sens est trivial et l'autre découle immédiatement de (4) et [Ei ; 4.9]). Supposons, à présent, $\mathcal{F}$ de longueur d finie. La résolution $\mathcal{F}$ est une résolution projective de M, donc $\operatorname{projdim} M \leq d$. De plus, $\mathrm{Tor}_d^R(M, R/\mathfrak{m}) = F_d \otimes_R R/\mathfrak{m}$ est non nul puisque F_d est non nul (voir [Ei ; corollaire 4.9] [39]). Il s'ensuit qu'un résolution projective de M doit être de longueur au moins égale à d ; ainsi, $d \leq \operatorname{projdim} M$. ∎

On termine cette sous-section en rappelant une identité homologique utile en particulier pour démontrer le formule de Auslander-Buchsbaum (voir 4.1.2). Ce résultat se trouve, par exemple, dans [BH ; 1.3.5].

Théorème 7.5.5 – *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, M un R-module de type fini et $x \in \mathfrak{m}$ qui soit M-régulier et R-régulier. Alors,*

$$\operatorname{projdim}_R M = \operatorname{projdim}_{R/xR} M/xM.$$

[39] L'énoncé de [Ei ; corollaire 4.9] précise que, si R est un anneau local et M et N deux R-modules de type fini tels que $M \otimes N = 0$, alors M ou N est nul.

Références.

[B] D.J. Benson. *Polynomial invariants of finite groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series 190. Cambridge university press, 1993.
[BH] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge studies in advanced mathematics 39. Cambridge university press, 1993.
[BV] W. Bruns and U. Vetter. *Determinantal rings.* Lecture Notes in Mathematics 1327. Springer-Verlag, 1988.
[Ei] D. Eisenbud. *Commutative Algebra.* G.T.M. 150, Springer-Verlag, 1995.
[Ma] H. Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 8. Cambridge university press, 1986.
[Pe] C. Peskine. *Introduction algébrique à la géométrie projective.* Cours de D.E.A., Polycopié Université Paris VI, 1993.
[Ro] J.J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* Academic press 1979.
[W] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge studies in advanced mathematics 38. Cambridge university press, 1994.