Université Paris 13
23 avril 2021

Mathématiques
Groupes & Représentations
F. Brumley & L. Rigal

GROUPES & REPRESENTATIONS

La note finale tiendra largement compte du soin et de la précision apportés à la présentation et à la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée par une référence au cours.

* * *

Exercice 1. Représentations et sous-groupes distingués.

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation de G sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. On appelle noyau de la représentation (V, ρ) le noyau du morphisme de groupes ρ. On rappelle qu'une représentation est dite *fidèle* si son noyau est réduit au neutre de G.

1. *Représentations et sous-groupes distingués.*
1.1. Montrer que la représentation régulière d'un groupe fini est fidèle.
1.2. En déduire que, si G est un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G, alors il existe une représentation de G dont H est le noyau.
1.3. Soit G un groupe fini. Montrer que l'ensemble des sous-groupes distingués de G coïncide avec l'ensemble des noyaux de représentations de dimension finie de G.

2. *Noyau des représentations simples de G.* Soit G un groupe fini. On note $(V_1, \rho_1), \ldots, (V_s, \rho_s)$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations simples de dimension finie de G. Montrer que l'ensemble des sous-groupes distingués de G coïncide avec l'ensemble

$$\{\cap_{j\in J} \ker(\rho_j),\ J \subseteq \{1, \ldots, s\}\}.$$

3. *Caractères et sous-groupes distingués.*
3.1. Soit (V, ρ) une représentation de dimension finie de G et χ son caractère. Le but de cette question est de montrer l'égalité

$$\ker(\rho) = \{g \in G \,|\, \chi(g) = \chi(e)\}.$$

3.1.1. Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des complexes de module 1.
3.1.2 Conclure. (On pourra utiliser l'énoncé classique suivant : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ sont des nombres complexes tels que $|\sum_{1\le i\le \ell} \lambda_i| = \sum_{1\le i\le \ell} |\lambda_i|$, alors il existe un entier j, $1 \le j \le \ell$ et des réels positifs r_i, $1 \le i \le \ell$, tels que, pour tout $1 \le i \le \ell$, $\lambda_i = r_i\lambda_j$.)
3.2. Décrire à l'aide de ce qui précède un moyen de déduire de la table de caractères de G la liste de ses sous-groupes distingués.
3.3. Application. On rappelle ci-dessous la table de caractères des groupes $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_5$ (avec $\omega = \exp(2i\pi/3)$). Déduire de ces tables la liste des sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_5$.

	1	4	4	3
$\mathfrak{A}_4$	id	(123)	(132)	(12)(34)
V_1	1	1	1	1
V_2	1	ω	ω^2	1
V_3	1	ω^2	ω	1
V_4	3	0	0	-1

	1	20	15	12	12
$\mathfrak{A}_5$	id	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
V_1	1	1	1	1	1
V_2	4	1	0	-1	-1
V_3	5	-1	1	0	0
V_4	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
V_5	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 2. Représentations de $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$.

Le but de cet exercice est de dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$ et de $\mathfrak{A}_5$.

1. Rappeler la définition de la représentation triviale, de la représentation signature et de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$. On note respectivement $\mathbf{1}$, sgn et V ces représentations.

Calculer la valeur prise par le caractère de la représentation standard sur la permutation (1234). On donne, dans le tableau ci-dessous, les valeurs prises par ce caractère sur $\mathfrak{S}_5$.

	1	10	20	30	24	15	20
$\mathfrak{S}_5$	id	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
V	4	2	1	0	-1	0	-1

2. Calculer le caractère de $V \otimes \mathrm{sgn}$ et de $\mathbf{Alt}^2(V)$. Montrer que ces représentations sont irréductibles.
3. Dans cette question, on s'intéresse à la représentation $\mathbf{Sym}^2(V)$ de $\mathfrak{S}_5$.
3.1. Calculer le caractère de $\mathbf{Sym}^2(V)$.
3.2. Calculer la multiplicité de $\mathbf{1}$ et V dans $\mathbf{Sym}^2(V)$.
3.3. Montrer qu'il existe une représentation W de dimension 5 de $\mathfrak{S}_5$ telle qu'on ait un isomorphisme de représentations

$$\mathbf{Sym}^2(V) \cong \mathbf{1} \oplus V \oplus W.$$

3.4. Calculer le caractère de W et montrer qu'elle est irréductible.
4. Dresser la table des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_5$.
5. Le cas de $\mathfrak{A}_5$. On rappelle que le groupe $\mathfrak{A}_5$ a 5 classes de conjugaisons. La liste de ces classes est la suivante : la classe de l'identité, de cardinal 1 ; la classe de (123), de cardinal 20 ; la classe de (12345), de cardinal 12 ; la classe de (21345), de cardinal 12 ; la classe de (12)(34), de cardinal 15.
5.1. Déterminer, parmi les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$, celles dont la restriction à $\mathfrak{A}_5$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$. En déduire 3 représentations irréductibles, deux-à-deux non-isomorphes de $\mathfrak{A}_5$.
5.2. Un résultat préliminaire. Montrer que dans $\mathfrak{A}_5$ tout élément est conjugué à son inverse. En déduire que les caractères de $\mathfrak{A}_5$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
5.3. Dresser la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$. (On pourra utiliser les relations d'orthogonalité sur les lignes et sur les colonnes de la table de caractères.)