Partie I

Notions ensemblistes.

1 Ensembles.

Dans cette section, on rappelle le vocabulaire de base sur les ensembles. La définition de la notion d'ensemble n'est pas abordée ; on se contente de l'intuition qu'on en a.

1.1 Rappels de vocabulaire.

Comme on l'a dit précédemment, la notion d'ensemble ne sera pas définie de façon rigoureuse dans ce cours et on se contentera de la représentation intuitive qu'on en a. Un ensemble est défini par la donnée de ses éléments. Rappelons qu'un ensemble qui n'a qu'un élément est appelé un *singleton*. Enfin, l'*ensemble vide* est l'ensemble qui n'a aucun élément ; il est noté $\emptyset$.

Les ensembles de référence que l'on supposera connus sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Dans un premier temps, on se contentera de leur définition naïve telle qu'elle a été introduite au Lycée. Néanmoins, on reviendra en détail sur la construction de certains d'entre eux dans des chapitres ultérieurs. Ces ensembles serviront de source d'exemple pour illustrer les différentes notions abordées. On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Étant donné un ensemble E, il est souvent utile de distinguer certains éléments parmi tous les éléments. Les éléments que l'on souhaite distinguer forment alors un *sous-ensemble*.

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Soit x un élément de E. Pour exprimer que x est dans A on dit que x *appartient* à A, ce que l'on écrit $x \in A$. Pour exprimer que x n'est pas dans A on dit que x *n'appartient pas* à A, ce que l'on écrit $x \notin A$. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, on a $-1 \notin \mathbb{N}$ et $5 \in \mathbb{N}$.

Étant donné un ensemble E. Si les éléments que l'on souhaite distinguer ne sont pas trop nombreux, on peut expliciter le sous-ensemble qu'ils forment en dressant leur liste exhaustive. Pour ce faire, on utilise une notation avec accolades. Par exemple, on peut considérer le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ de $\mathbb{N}$. Attention, dans un telle notation, l'ordre dans lequel sont rangés les éléments entre accolades n'a pas d'importance. Ainsi, $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 4, 3, 2\}$ désignent le même sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Mais, souvent, les éléments de E que l'on veut distinguer pour former un sous-ensemble sont trop nombreux, voire, en nombre infini. Il est alors impossible d'en dresser la liste exhaustive et, pour les distinguer, on recourt à la notion de *propriété*.

Ainsi, soient E un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les éléments de E. Un élément x de E peut satisfaire ou ne pas satisfaire la propriété $\mathcal{P}$. Soit x un élément de E. Si x satisfait la propriété $\mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{P}(x)$ est *vraie*, ce que l'on note "$\mathcal{P}(x)$ est vraie" ou, plus simplement, "$\mathcal{P}(x)$". Si x ne satisfait pas la propriété $\mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{P}(x)$ est *fausse*.

Il est pratique d'introduire la négation de $\mathcal{P}$. C'est la propriété notée "non-$\mathcal{P}$" et définie par : pour $x \in E$, non-$\mathcal{P}(x)$ est vraie (resp. fausse) si $\mathcal{P}(x)$ est fausse (resp. vraie).

Si $\mathcal{P}$ est une propriété portant sur les éléments de E, on peut définir le sous-ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Si l'on note A ce sous-ensemble, on écrit

$$A = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\} = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x)\}.$$

Cette écriture formelle se lit donc "A est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie". Si B est le sous-ensemble des éléments de E qui ne satisfont pas la propriété $\mathcal{P}$, on a, par exemple :

$$B = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x) \text{ est fausse}\} = \{x \in E \ ; \ \text{non-}\mathcal{P}(x)\}.$$

Prenons quelques exemples pour illustrer cette notion. Si $\mathcal{P}$ est la propriété "être inférieur ou égal à 3 et strictement supérieur à -1" portant sur les éléments de $\mathbb{R}$. Alors, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par cette propriété est l'intervalle $]-1,3]$:

$$]-1,3] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ -1 < x \leq 3\}.$$

Si $\mathcal{P}$ est la propriété "être de module 1" portant sur les éléments de $\mathbb{C}$. Alors, le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ définit par cette propriété est noté $\mathbb{U}$, et l'on a :

$$\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{C} \ ; \ |x| = 1\}.$$

On termine cette section par l'introduction d'un moyen permettant de construire, à partir d'un ensemble donné, un autre ensemble.

Définition 1.1 – *Soit E un ensemble. On appelle puissance de E l'ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E.*

Exemple 1.2 – Considérons l'ensemble E des nombres entiers non nuls, inférieurs ou égaux à 3 : $E = \{1,2,3\}$. Alors,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

1.2 Inclusion.

Dans cette sous-section, on considère la situation suivante. On se donne un ensemble E et deux sous-ensembles A et B de E. Le but est alors de comparer A et B.

Pour ce faire, on est amené à introduire la notion d'*inclusion* et d'*égalité* entre sous-ensembles d'un ensemble donné.

Comme on le verra, ces notions, qui portent sur des sous-ensembles, sont étroitement liées aux notions d'*implication* et d'*équivalence* qui, elles, portent sur des propriétés. La compréhension de ce lien est cruciale car c'est sur lui que repose la plupart des démonstrations en mathématiques.

Définition 1.2.1 – *Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.*
1. On dit que A est inclus dans B, ce que l'on note $A \subseteq B$ (ou parfois $B \supseteq A$), si tout élément de A est élément de B.
2. On dit que A est égal à B, ce que l'on note $A = B$, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Supposons donnés un ensemble E et deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ portant sur les éléments de E. On commence par quelques rappels de vocabulaire. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, ce que l'on note $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, si tout élément de E qui satisfait $\mathcal{P}$ satisfait aussi $\mathcal{Q}$. On dit que $\mathcal{P}$ *est équivalente à* $\mathcal{Q}$, ce que l'on note $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$, si d'une part $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ et d'autre part $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$.

Soit $x \in E$. Pour dire "si $\mathcal{P}(x)$ est vraie alors $\mathcal{Q}(x)$ est vraie et si $\mathcal{Q}(x)$ est vraie alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie" on dit plus simplement "$\mathcal{P}(x)$ est vraie si et seulement si $\mathcal{Q}(x)$ est vraie". Ainsi, dire que $\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$ signifie que, pour tout éléments x de E, x satisfait $\mathcal{P}$ si et seulement si il satisfait $\mathcal{Q}$.

Définissons alors les sous-ensembles suivants de E :

$$A = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x)\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in E \ ; \ \mathcal{Q}(x)\}.$$

Il découle immédiatement des définissions que la phrase "$A \subseteq B$" est synonyme de la phrase "$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$" et que la phrase "$A = B$" est synonyme de la phrase "$\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$".

1.3 Réunion, intersection, différence.

On commence par définir la réunion, l'intersection et la différence de deux sous-ensembles d'un ensemble donné.

Définition 1.3.1 – *Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.*
(i) La réunion de A et de B est le sous-ensemble de E composé des éléments qui sont dans A ou dans B. La réunion de A et B est notée $A \cup B$.
(ii) L'intersection de A et de B est le sous-ensemble de E composé des éléments qui sont dans A et dans B. L'intersection de A et B est notée $A \cap B$.
(iii) La différence de A et B est le sous-ensemble de E composé des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B. La différence de A et B est notée $A \setminus B$.

Remarque 1.3.2 – Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
1. Dans la définition de la réunion de A et de B, il faut bien prendre garde que le *ou* est inclusif (on dit aussi non-exclusif). Cela signifie que l'on accepte, dans $A \cup B$ les éléments qui sont dans A et dans B. Autrement dit, on a :

$$A \cap B \subseteq A \cup B.$$

2. Dans la définition de la réunion et de l'intersection de A et B, l'ordre dans lequel A et B interviennent n'a pas d'importance. Cest-à-dire que $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$. Il faut bien prendre garde que, en revanche, pour la différence de A et B l'ordre est essentiel. En d'autres termes, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ peuvent ne pas être égaux.
3. On a :
(i) $A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
(ii) $A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}$;
(iii) $A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Exemple 1.3.3 – On se place dans l'ensemble $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles $A =]-5, 12]$ et $B = [7, 33]$. Alors, on a $A \cap B = [7, 12]$, $A \cup B =]-5, 33]$, $A \setminus B =]-5, 7[$ et $B \setminus A =]12, 33]$.

Exercice 1.3.4 – Soient E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E.
1. Montrer que l'on a $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Cet ensemble sera noté $A \cup B \cup C$.
2. Montrer que l'on a $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Cet ensemble sera noté $A \cap B \cap C$.

Définition 1.3.5 – *Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Ainsi, le complémentaire de A dans E est la différence $E \setminus A$ de E et de A.*

Remarque 1.3.6 – Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.
1. On a :

$$E \setminus A = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}.$$

2. Si A est défini comme l'ensemble des éléments de E qui vérifient une certaine propriété $\mathcal{P}$ portant sur les éléments de E, alors $E \setminus A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne vérifie pas $\mathcal{P}$ c'est-à-dire qui vérifient non-$\mathcal{P}$.

Une seconde remarque sur le complémentaire, en lien avec la notion de *démonstration par contrapposée*, s'impose.

Remarque 1.3.7 – Soit E un ensemble.
1. Considérons deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ portant sur les éléments de E. Il est très important de se souvenir du fait suivant. Démontrer que l'on a "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$" est équivalent à démontrer que l'on a "non-$\mathcal{Q} \Longrightarrow$ non-$\mathcal{P}$". C'est le principe dit de démonstration par contrapposée.
2. Si maintenant on considère les sous-ensembles A et B de E définis par $A = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x)\}$ et $B = \{x \in E \ ; \ \mathcal{Q}(x)\}$, le principe de contrapposition se traduit au niveau des ensembles A et B par le fait que $A \subseteq B$ est équivalent à $E \setminus A \supseteq E \setminus B$.

Il est souvent utile de *partager* un ensemble donné en deux parties sans éléments communs. On dit alors qu'on fait une partition de cet ensemble. Voici les définitions rigoureuses permettant de mettre en oeuvre cette idée.

Définition 1.3.8 – *Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.*
1. On dit que A et B sont disjoints si ils n'ont pas d'éléments en commun.
2. On dit que A et B forment une partition de E si ils sont disjoints et si tout élément de E est dans A ou dans B.

Remarque 1.3.9 – Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
1. Dire que A et B sont disjoints signifie que $A \cap B = \emptyset$.
2. Dire que A et B forment une partition de E signifie que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

Exemple 1.3.10 – L'ensemble A des nombres entiers naturels pairs et l'ensemble B des nombres entiers naturels impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.

1.4 Produit cartésien.

Dans cette sous-section, on définit un moyen de construire un nouvel ensemble à partir de deux ensembles donnés. Il s'agit de la notion de produit cartésien.

Définition 1.4.1 – *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble dont les éléments sont les couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.*

1.5 Relations d'équivalence.

La notion de relation d'équivalence est assez délicate mais très utile dans la suite. On se limite ici au stricte nécessaire pour introduire la notion d'ensemble quotient relatif à une relation d'équivalence.

Définition 1.5.1 – *Soit E un ensemble. Une relation d'équivalence sur E est la donnée d'un sous ensemble $\mathcal{R}$ de $E \times E$ qui satisfait les propriétés suivantes :*
1. $\mathcal{R}$ est réflexif : pour tout $x \in E$, $(x, x) \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors $(y, x) \in \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$ est transitif : pour tous $x, y, z \in E$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, z) \in \mathcal{R}$, alors $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Remarque 1.5.2 – Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour deux éléments x, y de E, il est habituel d'écrire $x\mathcal{R}y$ (qui se lit x est en relation avec y) au lieu de $(x, y) \in \mathcal{R}$. C'est souvent ce que l'on fera dans la suite.

Une relation d'équivalence sur un ensemble E donne lieu à une partition de E, c'est-à-dire qu'elle permet de définir une collection de sous-ensembles deux-à-deux disjoints de E dont E soit la réunion. C'est cet aspect que l'on développe maintenant.

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. A tout $x \in E$ on associe l'ensemble $\mathcal{C}_x$, appelé classe d'équivalence de x (pour la relation $\mathcal{R}$), défini par

$$\mathcal{C}_x = \{y \in E \,|\, x\mathcal{R}y\}.$$

Il faut bien prendre garde que si l'on dresse la liste des classes d'équivalences associées à tous les éléments de E, on obtient des redondances. Le résultat suivant permet de clarifier ce point. Il est essentiel pour la suite.

Lemme 1.5.3 – *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On a les résultats suivants.*
1. Soit x un élément de E, alors $x \in \mathcal{C}_x$.
2. Soient x et y des éléments de E, alors :
2.1. $x \in \mathcal{C}_y$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$;
2.2. $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$;
2.3. $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$.
3. l'ensemble E des classes d'équivalences (deux-à-deux distinctes) de $\mathcal{R}$ est une partition de E.

Démonstration : Certains points sont entièrement démontrés ; pour d'autres, les détails sont laissés au lecteur en exercice.
1. C'est une conséquence immédiate de la réflexivité de $\mathcal{R}$. (Détails en exercices.)
2.1. C'est une conséquence immédiate de la définition de classe d'équivalence. (Détails en exercices.)
2.2. Soient x et y des éléments de E. Supposons que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$. Alors, d'après le point 1, $x \in \mathcal{C}_y$, et donc, d'après 2,1, $x\mathcal{R}y$. Réciproquement, supposons que $x\mathcal{R}y$. On montre d'abord que $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}_y$. Soit $z \in \mathcal{C}_x$. D'après 2.1, $z\mathcal{R}x$. Donc, par transitivité, $z\mathcal{R}y$ ce dont on déduit par 2.1 que $z \in \mathcal{C}_y$. On a montré que $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}_y$. Bien sûr, on démontre de même que $\mathcal{C}_x \supseteq \mathcal{C}_y$. Finalement, on obtient que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$. On a montré l'équivalence des deux assertions de 2.2.
2.3. Soient x et y des éléments de E. Supposons que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$. Alors, $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Mais, d'après le point 1, $\mathcal{C}_x$ est non vide. On a prouvé que $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$. Alors, il existe un élément $z \in E$ tel que $z \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$. Comme $z \in \mathcal{C}_x$, les points 2.1 et 2.2 assurent que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_z$. De même, Comme $z \in \mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_z$. Finalement $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Ceci achève la démonstration de ce point.
3. Il s'agit de montrer que tout élément de E est dans une classe d'équivalence et que les classes d'équivalence (deux-à-deux distinctes) ont deux-à-deux une intersection vide. Comme tout élément x de E est dans sa classe (cf. 1), le premier point est clair. Considérons par ailleurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux classes distinctes pour la relation $\mathcal{R}$. Par définition, il existe x et y dans E tels que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_y$. Si l'on suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$, alors le point 2.3 montre que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, ce qui est contradictoire. Ainsi $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. La démonstration du point 3 est terminée. ∎

On passe maintenant à la notion d'ensemble quotient pour une relation d'équivalence. Pour cela on rappelle que, si E est un ensemble, le *nouvel* ensemble dont les éléments sont *tous les* *sous-ensembles de E* est noté $\mathcal{P}(E)$. Avec ce vocabulaire, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. On le définit ainsi.

Définition 1.5.4 – *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, que l'on note $E/\mathcal{R}$, le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$. En d'autres termes, $E/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(E)$, et un élément $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}(E)$ est dans $E/\mathcal{R}$ s'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{X} = \mathcal{C}_x$.*

La notion de relation d'équivalence est fondamentale dans de nombreuses situations. De notre point de vue, elle servira en particulier à définir les ensembles quotients de $\mathbb{Z}$, dont les éléments sont les *classes de congruence* modulo un entier n de $\mathbb{Z}$. Cette construction sera abordée au chapitre III. Néanmoins, une autre application, probablement plus fondamentale encore, sera mise en évidence dans l'exercice 4.15 du présent chapitre. Pour plus de détails à ce sujet, voir la remarque 2.3.4 de la section 2 à suivre.

On termine par un point de vocabulaire utile.

Définition 1.3 – *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Un système complet de représentants des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ est un sous ensemble X de E tel que :*
1. deux éléments distincts de X aient des classes distinctes ;
2. pour tout $y \in E$, il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$.

1.6 Relations d'ordre.

Dans cette courte section, on définit la notion de relation d'ordre. On se contente essentiellement d'en donner la définition et de mettre en évidence le fait qu'il existe des relations d'ordre *totales* et d'autres qui ne le sont pas.

Définition 1.6.1 – *Soit E un ensemble. Une relation d'ordre sur E est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $E \times E$ qui satisfait les propriétés suivantes :*
1. $\mathcal{R}$ est réflexif : pour tout $x \in E$, $(x, x) \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$ est anti-symétrique : pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, x) \in \mathcal{R}$, alors $x = y$;
3. $\mathcal{R}$ est transitif : pour tous $x, y, z \in E$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, z) \in \mathcal{R}$, alors $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Remarque 1.6.2 – Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. Pour deux éléments x, y de E, il est habituel d'écrire $x \leq y$ (qui se lit x est inférieur à y pour la relation $\mathcal{R}$) au lieu de $(x, y) \in \mathcal{R}$. C'est souvent ce que l'on fera dans la suite. En outre, lorsqu'on utilise cette notation, il est habituel de lui adjoindre la notation $<$, définie de la façon suivante. Si $x, y \in E$, on écrit que $x < y$ (qui se lit x est strictement inférieur à y) si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Définition 1.6.3 – *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale sur E si, pour tous x, y dans E, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Exemple 1.6.4 –
1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est muni d'une relation d'ordre total naturelle (voir la section 2 du chapitre II pour les détails).
2. On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que l'on munit de la relation binaire suivante :

$$\forall\, (m, n),\, (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (m, n) \leq (p, q) \quad \text{si} \quad m \leq p \quad \text{et} \quad n \leq q.$$

Le relation ci-dessus est une relation d'ordre (appelé ordre produit) ; cet ordre n'est pas total.

2 Applications.

Dans cette section, on introduit la notion d'application.

2.1 Définition.

La définition intuitive de la notion d'application d'un ensemble X vers un ensemble Y est la suivante : il s'agit d'une machine qui à tout élément de X associe un élément de Y (et un seul). Pour passer de l'intuition à une définition rigoureuse, il faut faire appel à la notion de graphe.

Définition 2.1.1 – *Soient X et Y deux ensembles. Un graphe dans $X \times Y$ est un sous-ensemble G de $X \times Y$ possédant la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$.*

Exemple 2.1.2 –
1. Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'est pas un graphe.
2. Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ y = x^2\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un graphe.
3. Pour tout ensemble X, le sous-ensemble $\{(x, y) \in X \times X \ ; \ x = y\}$ de $X \times X$ (aussi noté $\{(x, x) \ ; \ x \in X\}$) est un graphe.

Définition 2.1.3 – *Soient X et Y deux ensembles. Une application f de X vers Y est un triplet $f = (X, Y, G)$ où G est un graphe de $X \times Y$. On dira que X est l'ensemble de départ de f, que Y est l'ensemble d'arrivé de f et que G est le graphe de f. Pour $x \in X$, l'unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$ est noté $f(x)$ et est appelé l'image de x par f.*

Remarque 2.1.4 – Dans la pratique, une application $f = (X, Y, G)$ de l'ensemble X vers l'ensemble Y sera plutôt notée $f : X \longrightarrow Y$ ou encore

$$\begin{array}{cccc} f : & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Le graphe qui définit f n'est alors plus explicite dans l'expression de f mais on le retrouve par $G = \{(x, f(x)) \ ; \ x \in X\}$. Lorsque qu'on mentionnera une application par la notation $f : X \longrightarrow Y$, on notera souvent son graphe G_f.

Remarque 2.1.5 –
1. Il faut bien noter qu'une application est la donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et d'un graphe. Ainsi, dire que deux applications sont égales signifie qu'elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe.
2. Par exemple, les applications

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} g : &]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

sont distinctes car elles n'ont pas le même ensemble de départ.
3. Soient $f = (X, Y, G)$ une application et A un sous-ensemble de X. Il est clair que $H = \{(x, y) \in X \times Y \ ; \ (x, y) \in G \text{ et } x \in A\}$ est un graphe de $A \times Y$. L'application $g = (A, Y, H)$ est appelée la restriction de f à A et est notée $f_{|A}$. On a donc $f : X \longrightarrow Y$, $g : A \longrightarrow Y$ et, pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$. Par exemple, au point 2 ci-dessus, g est la restriction de f à $]-\pi, \pi[$.

Exemple 2.1.6 – Soit X un ensemble. On a déjà vu que le sous-ensemble $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \ ; \ x \in X\}$ de $X \times X$ est un graphe de $X \times X$. On appelle application identique (ou identité) de X l'application, notée id_X, et définie par $\mathrm{id}_X = (X, X, \Delta)$.

Sous certaines conditions de compatibilité, on peut composer les applications. C'est ce que l'on explique maintenant.

Théorème 2.1.7 – *Soient X, Y et Z des ensembles. Soient $f = (X, Y, G_f)$ et $g = (Y, Z, G_g)$ deux applications. Le sous-ensemble*

$$G = \{(x,z) \in X \times Z \ ; \ \textit{il existe } y \in Y \textit{ tel que } (x,y) \in G_f \textit{ et } (y,z) \in G_g\}$$

est un graphe de $X \times Z$.

Démonstration : Soit $x \in X$. Puisque G_f est un graphe, il existe $y \in Y$ tel que $(x,y) \in G_f$. Comme G_g est un graphe, il existe alors $z \in Z$ tel que $(y,z) \in G_g$. Par définition de G, on a donc $(x,z) \in G$.

Soient $x \in X$ et z et z' des éléments de Z tels que (x,z) et (x,z') soient dans G. Par définition de G, il existe $y, y' \in Y$ tels que $(x,y) \in G_f$, $(y,z) \in G_g$, $(x,y') \in G_f$, $(y',z') \in G_g$. Comme G_f est un graphe, $y = y'$. Comme G_g est un graphe, il s'ensuit que $z = z'$. Ceci montre que G est un graphe. ■

Définition 2.1.8 – *On reprend les notations du théorème 2.1.7. La composée de f et g est l'application, notée $g \circ f$, et définie par $g \circ f = (X, Z, G)$.*

Remarque 2.1.9 – Soient X, Y, Z des ensembles et $f = (X, Y, G_f)$ et $g = (Y, Z, G_g)$ des applications. Notons $G_{g \circ f}$ le graphe de $g \circ f$. Comme l'assure le théorème 2.1.7, pour tout x dans X, il existe un unique $z \in Z$ tel que $(x,z) \in G_{g \circ f}$. Le premier paragraphe de la démonstration du théorème 2.1.7 assure alors que l'on a $z = g(f(x))$. En conclusion, on a

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f & : & X & \longrightarrow & Z \\ & & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Exercice 2.1.10 – Soient T, X, Y, et Z des ensembles et $f : T \longrightarrow X$, $g : X \longrightarrow Y$ et $h : Y \longrightarrow Z$ des applications. Montrer que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Cette application est notée $h \circ g \circ f$.

La notion d'*applications réciproques l'une de l'autre* sera utile dans la suite. Elle est définie de la façon suivante.

Définition 2.1.11 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ des applications. On dit que f et g sont réciproques l'une de l'autre si $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Remarque 2.1.12 – Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ des applications. Il est clair que les assertions suivantes sont équivalentes :
1. f et g sont réciproques l'une de l'autre ;
2. pour tout $x \in X$, $g \circ f(x) = x$, et pour tout $y \in Y$, $f \circ g(y) = y$.

Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. La question de savoir si il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que f et g soient réciproques l'une de l'autre est souvent cruciale. On verra plus loin que c'est la notion de *bijectivité* qui permet de traiter cette question. Cependant, on peut dès à présent montrer qu'il existe au plus une telle application. C'est l'objet du prochain énoncé.

Proposition 2.1.13 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Si $g : Y \longrightarrow X$ et $g' : Y \longrightarrow X$ sont des applications telles que f et g d'une part et f et g' d'autre part soient réciproques l'une de l'autre, alors $g = g'$.*

Démonstration : Soit $y \in Y$. Puisque f et g sont réciproques l'une de l'autre, on a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ainsi, $f \circ g(y) = y$. Mais, on a aussi $g \circ f = g' \circ f = \mathrm{id}_X$. Il vient donc

$$g(y) = g(f \circ g(y)) = (g \circ f \circ g)(y) = g \circ f(g(y)) = g' \circ f(g(y)) = g'(f \circ g(y)) = g'(y).$$

On a donc montré que, pour tout $y \in Y$, $g(y) = g'(y)$, ce qui prouve que $g = g'$. ∎

On termine sette section par la définition d'application croissante d'un ensemble ordonné vers un autre.

Définition 2.1 – *Soient E, F des ensembles ordonnés et $f : E \longrightarrow F$ une application de E vers F. On note $\leq$ l'ordre de E et $\preceq$ l'ordre de F.*
1. On dit que f est croissante (resp. décroissante) si, pour tous $x, y \in E$, si $x \leq y$, alors $f(x) \preceq f(y)$ (resp. $f(x) \succeq f(y)$).
2. On dit que f est strictement croissante (resp. strictemenrt décroissante) si, pour tous $x, y \in E$, si $x < y$, alors $f(x) \prec f(y)$ (resp. $f(x) \succ f(y)$).

2.2 Injections, surjections, bijections.

Définition 2.2.1 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X vers Y. Soit $y \in Y$. On appelle antécédent de y par f tout élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$.*

Définition 2.2.2 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X vers Y.*
1. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée Y de f admet au plus un antécédent.
2. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée Y de f admet au moins un antécédent.
3. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée Y de f admet un antécédent et un seul.

Exercice 2.2.3 –
1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective.
2. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ est surjective.
3. Montrer que l'application $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est injective.

Exercice 2.2.4 – Montrer que toute restriction d'une application injective est injective. Montrer qu'une restriction d'une application surjective n'est pas nécessairement surjective.

La proposition suivante explicite la procédure la plus courante pour démontrer qu'une application est injective.

Proposition 2.2.5 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X vers Y. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. f est injective ;
2. pour tous $x_1, x_2 \in X$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.
3. pour tous $x_1, x_2 \in X$, si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Démonstration : Considérons un couple $(x_1, x_2) \in X \times X$. Les implication "si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$" et "si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$" sont les contrapposées l'une de l'autre. Il s'ensuit que les assertions 2 et 3 sont équivalentes. Il est clair que l'assertion 2 est équivalente à l'injectivité de f car elle exprime que si deux éléments de X sont antécédents d'un même élément de Y, alors il doivent être égaux. ∎

Exemple 2.2.6 – On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^3 \end{array}.$$

On va montrer que f est injective. Pour cela on va utiliser deux méthodes différentes. La première repose sur la caractérisation 2 donnée dans la proposition 2.2.5, la seconde repose sur la caractérisation 3 donnée dans cette même proposition.
1. Commençons par une observation. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right).$$

Enfin, il est clair que le terme $\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$ est positif ou nul et qu'il est nul si et seulement si x_1 et x_2 sont nuls.
2. Montrons que f est injective à l'aide de la caractérisation 2 de la proposition 2.2.5. Considérons $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Si l'on suppose que $f(x_1) = f(x_2)$, alors le calcul fait au point 1 ci-dessus assure que $x_1 = x_2$ ou que $\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0$. Mais, comme on l'a déjà signalé, si $\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0$, on a $x_1 = x_2 = 0$. Dans tous les cas, on a donc $x_1 = x_2$. Avec la caractérisation 2 de la proposition 2.2.5, on en déduit que f est injective.
3. Montrons que f est injective à l'aide de la caractérisation 3 de la proposition 2.2.5. Considérons $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et supposons que $x_1 \neq x_2$. Comme x_1 et x_2 ne sont pas tous deux nuls, on a $\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ et $x_1 - x_2 > 0$ ou $x_1 - x_2 < 0$. Compte tenu des propriétés de $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ou $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Ainsi, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Avec la caractérisation 3 de la proposition 2.2.5, on en déduit que f est injective.

Examinons à présent la notion d'application bijective. La proposition suivante montre qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ (nécessairement unique d'après la proposition 2.1.13) telle que f et g soient réciproques l'une de l'autre.

Proposition 2.2.7 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. f est bijective ;
2. il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que f et g soient réciproques l'une de l'autre.

Démonstration : Supposons que f est bijective. Par définition, cela signifie que, pour tout y de Y, il existe un unique élément de X, que l'on note x_y tel que $f(x_y) = y$. On peut donc considérer l'application

$$\begin{array}{rccl} g & : & Y & \longrightarrow & X \\ & & y & \longmapsto & x_y \end{array}.$$

Il est immédiat que, pour tout $y \in Y$, $f \circ g(y) = y$. D'autre part, soit $x \in X$. Par définition de g, $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f, c'est donc x. Ainsi, on a $g(f(x)) = x$. On a donc montré que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Réciproquement, supposons qu'il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que f et g soient réciproques l'une de l'autre. Soit y un élément de Y. Puisque $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g(y)$ est un antécédent de y. D'autre part, si x et x' sont des antécédents de y par f, on a $f(x) = f(x')$ et comme $g \circ f = \mathrm{id}_X$, il s'ensuit que $x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$. Ainsi, tout élément de Y admet un antécédent et un seul par f, c'est-à-dire que f est bijective. ■

Définition 2.2.8 – *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. L'unique application $g : Y \longrightarrow X$ telle que f et g soient réciproques l'une de l'autre est notée f^{-1} et est appelée l'application réciproque de f.*

2.3 Image directe et image réciproque.

On termine cette section par un point de vocabulaire utile dans la pratique.

Considérons deux ensembles X et Y et une application $f : X \longrightarrow Y$. Considérons en outre un sous-ensemble A de X et un sous-ensemble B de Y. On pose alors la définition suivante.

Définition 2.3.1 – *On reprend les notations ci-dessus.*
1. L'image directe de A par f est le sous-ensemble de Y, noté $f(A)$, et défini par :

$$f(A) = \{y \in Y \ ; \ \textit{il existe } x \in A \textit{ tel que } y = f(x)\}.$$

2. L'image réciproque de B par f est le sous-ensemble de X, noté $f^{-1}(B)$, et défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ ; \ f(x) \in B\}.$$

Définition 2.3.2 – *On reprend les notations ci-dessus. L'image directe de X par f est appelé l'image de l'application f.*

Remarque 2.3.3 – On reprend les notations ci-dessus. La définition 2.3.1 peut être reformulée ainsi.
1. L'ensemble $f(A)$ est le sous-ensemble des éléments de Y qui sont image d'au moins un élément de A, ou encore l'ensemble des images par f d'éléments de A.
2. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble des éléments de X dont l'image par f est dans B, ou encore l'ensemble des antécédents par f d'éléments de B.

Remarque 2.3.4 – On termine cette section par un commentaire très important qui sera développé plus tard (cf. exercice 4.15). Le problème que l'on se pose est le suivant : étant donnés deux ensembles X et Y et une application $f : X \longrightarrow Y$, peut-on associer à f une *nouvelle* application qui soit injective (respect. surjective) et, bien sûr, qui garde en mémoire les informations concernant f.
1. Dans le cas de la surjectivité, c'est très facile. Il suffit de considérer l'application g déduite de f par restriction de l'ensemble d'arrivée de f à $f(X)$:

$$\begin{array}{cccc} g & : & X & \longrightarrow & f(X) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On a donc

$$\forall\, x \in X, \quad g(x) = f(x).$$

De plus, il est clair que g *conserve toutes les informations sur* f en ce sens que l'on peut reconstruire les images des éléments de X par f à partir de g, comme le montre l'égalité ci-dessus. On peut même préciser ce dernier point ainsi. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} i_f & : & f(X) & \longrightarrow & Y \\ & & z & \mapsto & z \end{array}$$

alors on a $f = i_f \circ g$ (la vérification est laissée en exercice). Au passage, on a montré le point suivant : *toute application peut se factoriser comme la composée d'une application injective et d'une application surjective.*
2. Le cas de l'injectivité est beaucoup plus délicat. Il requiert la notion de relation d'équivalence et d'ensemble quotient. Il sera traité en détail à l'exercice 4.15.

3 Familles d'éléments d'un ensemble.

Dans la pratique, on est souvent amené a considérer des "collections" d'éléments pris dans un ensemble donné. Pour formaliser correctement cette idée, on recourt à la notion de *famille d'éléments*. Intuitivement, si E est l'ensemble dans lequel on puise les éléments, la détermination d'une famille d'éléments de E requiert un autre ensemble, I, dont les éléments permettront "d'étiqueter" les éléments pris dans E pour composer la famille considérée. En d'autre termes, chaque élément de I sera l'étiquette d'un élément de E et la famille sera la "collection" d'éléments de E ainsi sélectionnés. On est donc amené à la définition suivante.

Définition 3.1 – *Soit E un ensemble. Une famille d'éléments de E indexée par l'ensemble I est la donnée d'une application*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & I & \longrightarrow & E \\ & & i & \mapsto & a_i \end{array}.$$

La famille correspondante est notée $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque 3.2 – On reprend les notations de la définition 3.1.
1. Une famille indexée par I d'éléments de E n'est donc rien d'autre qu'une application de I dans E. Mais, comme on veut plutôt y penser comme à une collection d'éléments de E, on adopte la notation $(a_i)_{i\in I}$ au lieu de $(f(i))_{i\in I}$.
2. Conformément à la définition, il est autorisé, dans une famille, de reprendre plusieurs fois le même élément. Autrement dit, il est possible qu'à deux éléments différents i et j de I ont associe le même élément de E (c-à-d que $a_i = a_j$). Ceci se produit si et seulement si l'application sous-jacente f n'est pas injective.

L'idée que, dans une famille donnée, on puisse répéter plusieurs fois le même élément semble contre-intuitive. Elle est pourtant essentiel. C'est ce qui distingue une famille d'éléments de E d'un sous-ensemble de E. Pour cette raison, on est amené à associer à une famille son *support* qui, intuitivement, est le sous-ensemble (donc en particulier sans répétition) des éléments qui consituent la famille.

Définition 3.3 – *On reprend les notations de la définition 3.1. On appelle sous-ensemble associé à la famille $(a_i)_{i\in I}$ (ou encore support de la famille $(a_i)_{i\in I}$) l'image de f.*

Un des intérêts de la notion de famille est qu'elle permet d'étendre la réunion et l'intersection de sous-ensembles d'un ensemble E au-delà du cas où l'on en considère 2.

Soit E un ensemble. On peut en effet considérer une collection $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E indexée par I, autrement dit, une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ indexé par I.

La réunion et l'intersection de deux sous-ensembles d'un ensemble donnée, telles qu'elles ont été définies ci-avant, se généralisent alors de la façon suivante.

Définition 3.4 – *Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I de sous-ensembles d'un ensemble donné E.*
1. La réunion des sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est le sous-ensemble de E des éléments appartenant à l'un (au moins) des sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$. La réunion des sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est notée $\bigcup_{i\in I} A_i$.
2. L'intersection des sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est le sous-ensemble de E des éléments appartenant à tous les sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$. L'intersection des sous-ensembles de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est notée $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Remarque 3.5 – Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I de sous-ensembles d'un ensemble donné E. On a :
1. $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E\ ;\ \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}$;
2. $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E\ ;\ \text{pour tout } i \in I,\ x \in A_i\}$.

Exemple 3.6 –
1. Si $E = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $A_i = [-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}]$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = [-1, 1]$ et $\bigcap_{i\in I} A_i = \{0\}$.
2. Si $E = \mathbb{R}^2$, $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $i \in \mathbb{R}$, $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 \leq i^2\}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{R}^2$ $\bigcap_{i\in I} A_i = \{(0, 0)\}$.

4 *Exercices.*

§A - *Quantificateurs, contre-exemples, etc.*

Exercice 4.1 – Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
1. Exprimer en langage courant puis en langage formel (c'est-à-dire à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$) l'affirmation que f est injective, puis, la négation de cette affirmation.
2. Exprimer en langage courant puis en langage formel l'affirmation que f est surjective, puis, la négation de cette affirmation.
3. Exprimer en langage courant puis en langage formel l'affirmation que f est bijective, puis, la négation de cette affirmation.
4. Proposer un moyen pratique de montrer qu'une application est (resp. n'est pas) injective, surjective, bijective.

Exercice 4.2 – Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application. Exprimer formellement l'affirmation que f est croissante, puis, sa négation.

Exercice 4.3 – On considère l'énoncé suivant : un espace vectoriel E, distinct de $\{0\}$, et dont les seuls sous-espaces vectoriels sont $\{0\}$ et E est de dimension 1. Un étudiant propose le début de raisonnement suivant : *Supposons, par l'absurde, que E n'est pas de dimension* 1. *Comme E*

est distinct de $\{0\}$*, il contient au moins un vecteur non nul* v*. La droite* D *engendrée par* v *est un sous-espace verctoriel distinct de* $\{0\}$ *; on a donc* $D = E$ *et* E *est de dimension* 1*. Contradiction.*

Que pensez-vous de cette solution ? De quel type de raisonnement s'agit-il ? Est-il correct ? Proposez une autre rédaction de cette solution.

§B - *Intersection, réunion, différence, produit cartésien.*

Exercice 4.4 – Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles quelconques de E.
a) Démontrez les égalités suivantes ;
(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(iii) $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$;
(iv) $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.
b) Démontrez les égalités suivantes :
(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
(iii) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \cap (A \setminus C)$.
c) Démontrez l'équivalence : $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$
d) Démontrez l'équivalence : $(B \subseteq C) \Leftrightarrow ((A \cup B \subseteq A \cup C)$ et $(A \cap B \subseteq A \cap C))$.

Exercice 4.5 – Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles d'un ensemble A et B_1 et B_2 deux sous-ensembles d'un ensemble B.
1) Montrez que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
2) Montrez que cela ne marche plus si on remplace $\cap$ par $\cup$.

§C - *Images directes et réciproques.*

Exercice 4.6 – Soit $f : X \to Y$ une application. Montrez que, quels que soient les sous-ensembles A, A_1, A_2 de X et les sous-ensembles B, B_1, B_2 de Y, on a :
(i) $(A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subseteq f(A_2))$;
(ii) $(B_1 \subseteq B_2) \Rightarrow (f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2))$;
(iii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; (iv) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
(v) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(vi) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(vii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$;
(viii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

§D - *Injectivité, surjectivité, bijectivité.*

Exercice 4.7 – Pour chacune des applications suivantes dire si elle est injective, surjective, bijective (et si oui donner son application réciproque) :
(i) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
(ii) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sqrt{|x|}$;
(iii) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$;
(iv) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$;
(v) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$;
(vi) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x - 3y, x + y)$;
(vii) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 3x + 3y)$.

Exercice 4.8 – Montrer que toute application strictement croissante d'un ensemble totalement ordonné vers un autre est injective.

Exercice 4.9 – Soient $f : X \to Y, g : Y \to Z$ des applications.
1. Montrez que :
(i) si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective ;
(ii) si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective ;
(iii) si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
(iv) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. Montrer que la bijectivité de $g \circ f$ n'implique ni celle de g ni celle de f.

Exercice 4.10 – Soit $f : X \longrightarrow Y$, une application.
a) Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
b) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une application $h : Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.
c) Montrer que f est bijective si et seulement si il existe une application $k : Y \longrightarrow X$ telle que $k \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ k = \mathrm{id}_Y$.

Exercice 4.11 – Soit $f : E \to F$ une application.
1) Démontrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective ;
(ii) Pour tout sous-ensemble X de E, $f^{-1}(f(X)) = X$.
2) Même question avec les deux propositions :
(i) f est surjective ;
(ii) pour tout sous-ensemble Y de F, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Exercice 4.12 – Soient f, g, h des applications de E dans E.
1) On suppose f injective et $f \circ g = f \circ h$; peut-on en déduire $g = h$?
2) On suppose f surjective et $g \circ f = h \circ f$; peut-on en déduire $g = h$?

Exercice 4.13 – Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est équipotent avec l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$. (On dit que deux ensembles sont *équipotents* si il existe une bijection de l'un vers l'autre.)

§E - *Relations d'équivalence.*

Exercice 4.14 – Soit E un ensemble. Montrer que la donnée d'une relation d'équivalence sur E est équivalente à celle d'une partition de E.

Exercice 4.15 – **Application injective induite par une application.**
Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit sur E une relation binaire $\mathcal{R}$ par : pour $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$.
1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Soit $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.
2.1) Montrer que l'application $s_f : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ qui à $x \in E$ associe sa classe est surjective.
2.2) Montrer que l'application $i_f : E/\mathcal{R} \longrightarrow F$ qui à la classe de $x \in E$ associe $f(x)$ est bien définie et injective.
2.3) Montrer que $f = i_f \circ s_f$. (Cette décomposition s'appelle la décomposition canonique de f.)

Exercice 4.16 – Soient E un ensemble et A une partie de E. On définit sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E une relation binaire $\mathcal{R}$ par : pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $X\mathcal{R}Y$ si $X \cap A = Y \cap B$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que l'ensemble des parties de E incluses dans A est un système complet de représentants des classes de cette relation.

§F - *Relations d'ordre.*

Exercice 4.17 – Soit E un ensemble. Montrer que l'inclusion entre sous-ensembles de E permet de définir sur $\mathcal{P}(E)$ une relation d'ordre et que celle-ci n'est totale que si E est vide ou réduit à un singleton.