Partie VI

Géométrie vectorielle.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1 Espaces vectoriels.

Définition 1.1 – *Une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur un ensemble E est la donnée d'une loi de composition interne (l.c.i.) $+ : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$ et d'une loi de composition externe (l.c.e.) à scalaires dans $\mathbb{K}$ $. : \mathbb{K} \times E \mapsto E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ telles que :*
(i) $(E, +)$ soit un groupe abélien (dont le neutre est noté 0) ;
(ii) pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in E$: $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x+\lambda y$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1.x = x$.

Exercice 1.2 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*
1. $0.x = 0$ *;*
2. $\lambda.0 = 0$ *;*
3. $(-1).x = -x$.

Exemple 1.3 –
1. Le corps de base $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : la l.c.i. est l'addition dans $\mathbb{K}$; la l.c.e. est le produit dans $\mathbb{K}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel relativement aux lois :

$$+ \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \mapsto & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{array}$$

et

$$. \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) & \mapsto & (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{array}.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on appelle x_i le coefficient d'indice i (ou i-ème coefficient) de x. On note que, pour $n = 1$, on retrouve la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ définie au premier point.
3. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel relativement à la loi de groupe de $\mathbb{K}[X]$ définie au Chapitre V et à la l.c.e. suivante :

$$. \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, (a_i)_{i \in \mathbb{N}}) & \mapsto & (\lambda a_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{array}.$$

Définition 1.4 –
1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
2. Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même. Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Notation 1.5 – Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ (ainsi, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$). L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Définition 1.6 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vetoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 1.7 –
1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ une l.c.i. $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$, $(f,g) \mapsto f+g$ et une l.c.e. $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,E)$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ à scalaires dans $\mathbb{K}$ par : pour tout $x \in E$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Montrer que ces lois munissent $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Montrer que la composition des applications muni $GL(E)$ d'une structure de groupe. Ce groupe est appelé le groupe linéaire de E.

Exercice 1.8 –
1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit l'ensemble $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une l.c.i $+ \,:\, E \times E \longrightarrow E$ et d'une l.c.e. $. \,:\, \mathbb{K} \times E \longrightarrow$ à scalaires dans $\mathbb{K}$ respectivement définies, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E$ par $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Montrer que les lois ci-dessus munissent E d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle E le produit des espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est le produit des espaces vectoriels $\mathbb{K}, \ldots, \mathbb{K}$ (n fois).
3. Montrer que les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ sont isomorphes.

Définition 1.9 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble F de E telle que :*
(i) F est un sous-groupe de E ;
(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in F$, $\lambda x \in F$ (stabilité de F par produit externe).

Remarque 1.10 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une sous-espace vectoriel de E. Les restrictions à F des lois de composition qui définissent la structure d'espace vectoriel de E munissent F d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1.11 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) $0 \in F$;
(ii) pour tous $x, y \in F$, $x + y \in F$ (stabilité de F par somme) ;
(iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in F$, $\lambda x \in F$ (stabilité de F par produit externe).

Exemple 1.12 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. Alors, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

On introduit maintenant la notion de *combinaison linéaire*. Pour cela, il faut préciser le point pratique suivant. Soit I un ensemble et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle si le sous-ensemble J de I des éléments i tels que $\lambda_i \neq 0$ est fini.

Définition 1.13 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
1. Si I est un ensemble non-vide et $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E. Un élément x de E est dit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{X}$ si il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. L'ensemble de tous les vecteurs de E qui sont combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{X}$ est noté $\mathrm{CL}(\mathcal{X})$.
2. Si A est un sous-ensemble non vide de E, un élément x est dit combinaison linéaire d'éléments de A s'il est combinaison linéaire de la famille associée à A. L'ensemble de tous les vecteurs de E qui sont combinaison linéaire d'éléments de A est noté $\mathrm{CL}(A)$.

Remarque 1.14 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si A est un sous-ensemble non vide de E, un élément x est combinaison linéaire d'éléments de A si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i a_i$.

Remarque 1.15 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par convention, on pose que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille indexée par $\emptyset$ est $\{0\}$.

Exercice 1.16 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble et $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E. Montrer que $\mathrm{CL}(\mathcal{X})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.17 – *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle noyau de f le sous-ensemble* $\ker f = f^{-1}(0)$ *de E et image de f le sous-ensemble* $\mathrm{im} f = f(E)$ *de F.*

Exercice 1.18 – Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que l'image $f(U)$ d'un sous-espace vectoriel U de E est un sous-espace vectoriel de F. Montrer que l'image réciproque $f^{-1}(V)$ d'un sous-espace vectoriel V de F est un sous-espace vectoriel de E. En déduire que le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels de E et F, respectivement.

Exercice 1.19 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit I un ensemble non-vide et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'intersection $\cap_{i\in I} E_i$ des sous-espaces de cette famille est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.20 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
1. Soit A est une partie de E. Le sous-espace vectoriel de E engendré par A est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A ; il est noté $\mathrm{Vect}(A)$.
2. Soit I est un ensemble non-vide et $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E. Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{X}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par le sous-ensemble de E associé à $\mathcal{X}$.

Exercice 1.21 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.
1. Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{CL}(A)$.
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.

Définition 1.22 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\cup_{i=1}^n E_i$. Elle est notée $\sum_{i=1}^n E_i$.*

Exercice 1.23 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'un élément x de E est dans $\sum_{i=1}^n E_i$ si et seulement si, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $x_i \in E_i$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_n$.

Proposition 1.24 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, l'égalité $x_1 + \ldots + x_n = 0$ entraine que $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$;
(ii) pour tous n-uplets $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, l'égalité $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$ entraine que $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$;
(iii) pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i \cap \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} E_j = \{0\}$.

Démonstration : Exercice (très instructif). ∎

Définition 1.25 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Si les conditions de la proposition 1.24 sont vérifiées, on dit que les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ sont en somme directe et on note $\oplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$ leur somme.*

Définition 1.26 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires si ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$.*

Exercice 1.27 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que F et G sont supplémentaires si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ et un seul tel que $x = x_F + x_G$.
2. On considère l'application $p : E \longrightarrow E$ qui à tout $x \in E$ associe x_F (avec les notations ci-dessus). Montrer que p est une application linéaire telle que $p \circ p = p$. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G.
3. On considère l'application $s : E \longrightarrow E$ qui à tout $x \in E$ associe $x_F - x_G$ (avec les notations ci-dessus). Montrer que s est une application linéaire telle que $s \circ s = \mathrm{id}$. On dit que s est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

Définition 1.28 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non-vide et $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E.*
1. On dit que la famille $\mathcal{X}$ est libre si elle satisfait la propriété suivante : pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, l'égalité $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ entraîne que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.
2. On dit que $\mathcal{X}$ est une famille génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$.
3. On dit que $\mathcal{X}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Remarque 1.29 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par convention, la famille de E indexée par $\emptyset$ est libre. C'est donc une base de $\{0\}$.

Remarque 1.30 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non-vide et $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E. Si $\mathcal{X}$ est libre, alors pour $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on a $x_i \neq x_j$. Ainsi, la famille $\mathcal{X}$ est en fait un sous-ensemble de E.

Exercice 1.31 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non-vide et $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de E. Montrer que $\mathcal{X}$ est une base de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une et une seule famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ indexée par I d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. Cette famille est alors appelée la famille des coordonnées de x relativement à $\mathcal{X}$.

Le théorème suivant est d'une importance cruciale. Sa démonstration repose sur le Lemme de Zorn qui est au delà des objectifs de ce cours. Pour cette raison, on admet ce résultat.

Théorème 1.32 *(Existence de bases.)* – *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet une base.*

Exemple 1.33 – On reprend les notations des Exemples 1.3 et 1.12.
1. La famille (à un élément) (1) est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i l'élément de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Alors, la famille $(e_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Elle est appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
3. La famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$. Elle est appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(X^i)_{i \in \{0, \ldots, n\}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$. Elle est appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$. En particulier, $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants et il admet (1) pour base.

2 Espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 2.1 – *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si il possède une partie génératrice finie.*

Exercice 2.2 – *Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.*

Théorème 2.3 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
1. Si X est une partie génératrice finie de E, alors X contient une base de E. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base.
2. Si L est une partie libre de E, alors L est finie et de cardinal majoré par celui de toute partie génératrice de E.
3. Si L est une partie libre de E, il existe une base B de E telle que $L \subseteq B$. (Théorème de la base incomplète.)
4. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 2.4 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé le dimension de E et est noté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.*

Exemple 2.5 – On reprend les notations et résultats des Exemples 1.3, 1.12 et 1.33.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Corollaire 2.6 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.*
*1. Une partie libre de E est une base de E si et seulement si elle est maximale parmi les parties libres (*c-à-d : *elle n'est strictement contenu dans aucune partie libre) si et seulement si elle est de cardinal n.*
*2. Une partie génératrice de E est une base de E si et seulement si elle est minimale parmi les parties génératrices (*c-à-d : *elle ne contient strictement aucune partie génératrice) si et seulement si elle est de cardinal n.*

Corollaire 2.7 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.*

Démonstration : Exercice facile et important. ∎

Proposition 2.8 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_K E$. De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$.*

Définition 2.9 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{X}$ une famille d'éléments de E. On appelle rang de $\mathcal{X}$, que l'on note $\mathrm{rg}\mathcal{X}$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{X}$.*

Proposition 2.10 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors, $\dim_{\mathbb{K}} \oplus_{i \in \mathbb{N}} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim_{\mathbb{K}} E_i$.*

Exercice 2.11 – (Etend le cas $n = 2$ de la proposition 2.10.) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_K G - \dim_{\mathbb{K}} F \cap G$.

Théorème 2.12 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de E et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille d'éléments de F. Il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et une seule telle que, pour $1 \leq i \leq n$, $f(b_i) = x_i$.*

Exercice 2.13 – Le théorème 2.12 peut être illustré par l'exemple des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soient $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, mn scalaires. Montrer que l'application

$$f \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (\sum_{i=1}^m a_{1,i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{m,i}x_i) \end{array}$$

est linéaire.
2. Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une unique famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ de scalaires telle que

$$f \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (\sum_{i=1}^m a_{1,i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{m,i}x_i) \end{array}$$

Proposition 2.14 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$.*

Exercice 2.15 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors la dimension de $\mathrm{im}(f)$ est finie et majorée par n.

Définition 2.16 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est la dimension de $\mathrm{im} f$.*

Théorème 2.17 *(Théorème du rang.)* – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{im}(f).$$

Théorème 2.18 – *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est injective ;
(ii) f est surjective ;
(iii) f est un isomorphisme.

3 Structure d'algèbre.

On introduit dans cette section une structure très utile dans la suite, celle d'*algèbre sur un corps*. Cette structure en mélange deux déjà rencontrées, la structure d'anneau et la structure d'espace vectoriel.

Définition 3.1 – *On appelle algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-algèbre) un ensemble A muni de deux l.c.i. (notées $+$ et $\times$) et d'une l.c.e. à scalaires dans $\mathbb{K}$ (notée .) telles que :*
1. $(A, +, \times)$ soit un anneau ;
2. $(A, +, .)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
3. pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$, $\lambda.(a \times b) = (\lambda.a) \times b = a \times (\lambda.b)$.
Un algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ est dite commutative si l'anneau sous-jacent l'est.

Remarque 3.2 – Dans la définition 3.1, la troisième condition exprime la nécessité d'une règle de compatibilité entre le produit interne ($\times$) et le produit externe (.) d'une algèbre sur un corps. Il résulte en particulier de cette condition que, si I est un sous-ensemble de A qui est un idéal de l'anneau $(A, +, \times)$, alors I est un sous-espace vectoriel pour $(A, +, .)$.

Remarque 3.3 – Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Il faut prendre garde que l'on est en présence de deux multiplications internes, celle de $\mathbb{K}$ et celle de A. En particulier, on a un neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}$, $1_{\mathbb{K}}$, et un neutre pour la multiplication interne dans A, 1_A. Il résulte de la définition d'espace vectoriel que ces deux neutres vérifient $1_{\mathbb{K}}.1_A = 1_A$.

Définition 3.4 – *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre dont on note $+$, $\times$ et . les lois de composition. Un sous-ensemble B de A est appelé une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de A si c'est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ et un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $(A, +, .)$.*

Définition 3.5 – *Soient $(A, +, \times, .)$ et $(B, +, \times, .)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. On dit qu'une application $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres si f est un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (c'est-à-dire une application linéaire) et un morphisme d'anneaux. Un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres est un morphisme bijectif de $\mathbb{K}$-algèbres. Un endomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre est un morphisme d'une $\mathbb{K}$-algèbre vers elle-même. Un automorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre est un endomorphisme bijectif d'une $\mathbb{K}$-algèbre vers elle-même.*

Dans la suite du cours, on rencontrera trois exemples d'algèbres sur un corps. On en présente deux pour commencer : l'algèbre des polynômes à coefficients dans un corps et l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel. Pour introduire le premier exemple ci-dessus, on doit commencer par un exemple général de construction d'une algèbre.

Exemple 3.6 – **L'algèbre des applications à valeurs dans un corps.** Soit X un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$. On considère alors les deux l.c.i.

$$+ \ : \ \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \times \ : \ \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$$

où, pour $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ et la l.c.e.

$$. \ : \ \mathbb{K} \times \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$$

où, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $x \in X$, $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$. Avec ces notations, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Exemple 3.7 – **L'algèbre des polynômes sur un corps.** Soit $\mathbb{K}$ un corps.
1. On a défini, au chapitre V, deux lois de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a également défini à la section 1 du présent chapitre une loi de composition externe à scalaires dans $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}[X]$. Muni de ces trois lois de composition, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
2. L'application $i_{\mathbb{K}}$ du Lemme 1.4, Chapitre V est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
3. On rappelle les notations de la section 3 du Chapitre V : $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{K})$ est le sous-anneau des applications polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Conformément à l'Exemple 3.6, $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre et il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}(X)$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{K})$. De plus, l'application $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ du Chapitre V, Remarque 3.1.3 est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Exemple 3.8 – **L'algèbre des endomorphismes sur un espace vectoriel.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Conformément à l'Exercice 1.7 et en en reprennant les notations, $\mathcal{L}(E)$ est muni d'une addition (notée $+$) et d'un produit externe (noté .) tels quel $(\mathcal{L}(E), +, .)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En outre, la composition des applications définie sur $\mathcal{L}(E)$ une autre loi de composition interne, que l'on note $\circ$. On vérifie facilement que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Attention, en général $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutative. En fait, elle l'est si et seulement si E est de dimension finie égale à 0 ou 1.

4 Dualité

On aborde maintenant l'étude des *formes linéaires.* A ce sujet, on rappelle que le corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie égale à 1.

Définition 4.1 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble de toutes les formes linéaires sur E est appelé le dual de E et est noté E^*.*

Remarque 4.2 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le dual E^* de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.3 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Théorème 4.4 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan.
2. Si H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle dont H est le noyau.
3. Deux formes linéaires non nulles ϕ et ψ ont le même noyau si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\phi$.

Démonstration : Le point 1 est une conséquence immédiate du théorème du rang.

Pour le point 2, on peut considérer une base $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ de H et la compléter en une base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de E. On sait alors qu'il existe une forme linéaire $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\phi(b_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\phi(b_n) = 1$. Il est facile de vérifier que $\ker\phi = H$.

Pour le point 3, il est clair que si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\phi$ alors ϕ et ψ ont le même noyau. Réciproquement, si ϕ et ψ ont le même noyau H. Comme les formes linéaires ϕ et ψ sont non nulles, H est un hyperplan de E. Cet hyperplan admet un supplémentaire qui est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E. Donc il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$. Comme ϕ est non nulle, on doit avoir $\phi(v) \neq 0$. Posant $\lambda = \psi(v)/\phi(v)$, on vérifie facilement que $\psi = \lambda\phi$. ∎

Remarque 4.5 –
1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E. D'après le théorème 4.4, il existe une forme linéaire non nulle ϕ sur E telle que $H = \ker\phi$. On dit alors que ϕ est une *équation* de H. Le même théorème assure que deux équations de H sont multiples scalaires l'une de l'autre. Par abus de langage, on parle souvent de l'équation de H même si, d'après ce qui précède, une telle équation n'est définie qu'à multiplication près par un scalaire.
2. Le cas du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) aide à comprendre le vocabulaire. En effet, soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ et ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ telle que $\ker\phi = H$. On sait qu'il existe une unique famille $\{a_1, \ldots, a_n\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$\begin{array}{rccc} \phi \; : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \end{array}.$$

Ainsi, on a $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$. Ce qui définit H à l'aide d'une équation (au sens le plus usuel du terme). De plus, si une autre équation permet de définir H de la même façon, cette équation détermine une autre forme linéaire qui, d'après ce qui précède, doit être multiple scalaire de ϕ. On en déduit que cette seconde équation est un multiple de la précédente.

On étudie maintenant plus en détail les relations existant entre un espace vectoriel et son dual.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, on peut définir les formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$ suivantes : pour $1 \leq i \leq n$, e_i^* est définie en posant que, pour $1 \leq j \leq n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Ainsi, si x est un élément de E et si $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, pour $1 \leq i \leq n$, on a $e_i^*(x) = e_i^*(\sum_{j=1}^n x_je_j) = \sum_{j=1}^n x_je_i^*(e_j) = x_i$. Pour cette raison, la forme linéaire e_i^*, $1 \leq i \leq n$, est appelée la i-ième forme coordonnée associée à la base $\mathcal{B}$.

Théorème 4.6 – *Avec les notations précédentes, la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^*. En particulier,* $\dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration : Exercice facile et important. ∎

Définition 4.7 – *Avec les notations précédentes, la base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^* est appelée la base duale de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E.*

On passe maintenant à la notion d'orthogonalité.

Définition 4.8 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Si A est une partie de E, l'orthogonal de A dans E^*, noté $A^\perp$, est le sous-ensemble de E^* des formes linéaires qui s'annulent sur tout élément de A.
2. Si A est une partie de E^*, l'orthogonal de A dans E, noté $A^\perp$, est le sous-ensemble de E des eléments dont l'image par tout élément de A est nulle.

Proposition 4.9 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Si A est une partie de E (resp. E^*), $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* (resp. E).
2. Si A et B sont des parties de E (resp. E^*) telles que $A \subseteq B$, alors $A^\perp \supseteq B^\perp$. Si A et B sont des parties de E (resp. E^*), $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. Si A est une partie de E (resp. E^*), A et $\mathrm{Vect}(A)$ *ont même orthogonal.*
4. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \subseteq (F^\perp)^\perp$.

Théorème 4.10 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} F^\perp = \dim_{\mathbb{K}} E.$$

2. On a $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration : 1. Soit m la dimension de F. On peut considérer une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_m\}$ soit une base de F. Il n'est pas difficile de vérifier que $\{e_{m+1}^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de $F^\perp$.

Pour montrer 2, il suffit de se souvenir que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ et de comparer les dimensions. ∎

Remarque 4.11 – La notion d'orthogonal précise le fait, bien connu, qu'il y a deux façons de déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : l'une par la donnée d'une base, l'autre par celle d'une famille d'équations.
1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension m. Si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base de F, on peut la compléter en une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$. La preuve du théorème précédent montre que

$$F^\perp = \mathrm{Vect}\{e_{m+1}^*, \ldots, e_n^*\}.$$

Chacune des formes linéaires e_i^*, pour $m+1 \leq i \leq n$, a pour noyau un hyperplan H_i (auquel correspond une équation donnée par l'expression explicite de e_i^*). On a alors $F = \cap_{i=m+1}^n H_i$. Autrement dit, H est l'ensemble des éléments de F satisfaisant les $n-m$ équations données par $e_{m+1}^*, \ldots, e_n^*$.
2. Réciproquement, soit F un sous-espace de E déterminé par p équations linéaires ($p \in \mathbb{N}^*$). Chaque équation permet de définir une forme linéaire. On extrait de cette famille de p formes linéaires une famille libre (maximale) de m formes linéaires $\phi_1, \ldots, \phi_m$. Soit G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $\phi_1, \ldots, \phi_m$. On peut compléter $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ en une base $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de E^*. Soit alors $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'unique base de E dont $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est la base duale. On a $H = \mathrm{Vect}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$.

On termine cette section par une brève introduction de la transposée d'une application linéaire. Cette notion sera utile dans l'étude pratique des matrices.

Définition 4.12 – *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle transposée de f l'application*

$$\begin{array}{rcccc} {}^t f & : & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & & \lambda & \mapsto & \lambda \circ f \end{array}$$

Le résultat suivant sera utile dans la suite.

Proposition 4.13 – *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,*
1. l'application ${}^t f : F^* \longrightarrow E^*$ est linéaire ;
2. $\ker {}^t f = (\mathrm{im} f)^\perp$;
3. $\mathrm{rg}\,{}^t f = \mathrm{rg} f$.

Démonstration : Le premier point est une simple vérification. Le second découle immédiatement de la définition du noyau et de l'orthogonal. Pour le troisième, il faut utiliser le théorème du rang et le théorème 4.10. ∎

5 Matrices.

Dans la suite, si $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_r^* = \{1, \ldots, r\}$.

Définition 5.1 – *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à m lignes et n colonnes (ou de format $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application de $\mathbb{N}_m^* \times \mathbb{N}_n^*$ dans $\mathbb{K}$. On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de format $m \times n$. On pose $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$.*

Remarque 5.2 – Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice à m lignes et n colonnes. La donnée de A est donc la donnée d'un élément a_{ij} de $\mathbb{K}$ pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La notation classique consiste à présenter ces données sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, le coefficient a_{ij} figure en i-ième ligne et j-ième colonne. On utilise aussi la notation $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, plus compacte.

On définit maintenant deux opérations sur les matrices de format $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. La première, appelée addition, est une l.c.i., la seconde est une l.c.e. à scalaires dans $\mathbb{K}$:

$$+ \quad : \quad \begin{array}{rcl} M_{m,n}(\mathbb{K}) \times M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}) & \mapsto & (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}. \end{array},$$

$$. \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}) & \mapsto & (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}. \end{array}.$$

Exercice 5.3 – Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
1. L'ensemble $M_{m,n}(\mathbb{K})$ muni de la l.c.i. et de la l.c.e. ci-dessus est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Pour chaque couple $(i, j) \in \mathbb{N}_m^* \times \mathbb{N}_n^*$ on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients son nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. Cette matrice est appelée la matrice élémentaire d'indice (i, j). La famille $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{m,n}(\mathbb{K})$. En particulier, $\dim_{\mathbb{K}} M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$.

Exercice 5.4 – Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{f_i\}_{1 \leq j \leq m}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ respectivemement et, pour chaque couple $(i, j) \in \mathbb{N}_m^* \times \mathbb{N}_n^*$, notons $e_{i,j}$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ définie, pour $1 \leq k \leq n$ par $e_{i,j}(e_k) = \delta_{kj} e_i$. (On rappelle que, pour $p, q \in \mathbb{N}$, δ_{pq} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $p = q$ et 0 sinon.)
1. Montrer que l'application

$$\iota_{m,n} \quad : \quad \begin{array}{rcl} M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \\ E_{i,j} & \mapsto & e_{i,j}. \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
2. Décrire explicitement l'application $e_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Définition 5.5 – *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. La transposée d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, par $b_{ij} = a_{ji}$. La transposée de la matrice A est notée ${}^tA$.*

Exercice 5.6 – Soient $m, n \in \mathbb{K}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,m}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est une matrice de format $m \times n$ et $B = (b_{kl})_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq p}$ une matrice de format $n \times p$, on définit le produit de A et B, noté AB, par $AB = (c_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq p} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ où, pour $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$, on pose

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Il est facile de vérifier que le produit ainsi défini vérifie les propriétés usuelles (distributivité à gauche et à droite, associativité, *etc*). Les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 5.7 –
1. Calculer le produit de deux matrices élémentaires (de formats compatibles).
2. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices carrées de format $n \times n$ est particulièrement intéressant. Pour une telle matrice, les coefficients dont les indices de ligne et colonne coïncident sont appelés diagonaux.

Le produit de matrices permet de définir sur $M_n(\mathbb{K})$ une l.c.i.

$$\begin{array}{cccc} \times & : & M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & & (A, B) & \mapsto & AB. \end{array}.$$

Exercice 5.8 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Muni des opérations d'addition, produit externe et produit interne définis ci-dessus, l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. L'unité pour la multiplication est la matrice, notée I_n, dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent 1.

Si $n \geq 2$, cette $\mathbb{K}$-algèbre n'est ni commutative, ni intègre.

Compte tenu de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\mathbb{K})$ est en particulier un anneau. On dispose donc de la notion de matrice inversible. Le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles est donc un groupe pour le produit. Ce groupe est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et est appelé le groupe général linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Exercice 5.9 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$ sont-elles inversibles ?
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible.

Définition 5.10 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.*
1. On dit que A est diagonale si, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$.
2. On dit que A est triangulaire supérieure (resp. inférieur) si, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ (resp. $i < j$).
3. On dit que A est triangulaire supérieure (resp. inférieur) stricte si, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = 0$ lorsque $i \geq j$ (resp. $i \leq j$).
4. On dit que A est symétrique si, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = a_{ji}$.
5. On dit que A est antisymétrique si, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exercice 5.11 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que l'ensemble, noté $S_n(\mathbb{K})$, des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. En donner une base (en utilisant les matrices élémentaires.)
2. Montrer que l'ensemble, noté $A_n(\mathbb{K})$, des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. En donner une base (en utilisant les matrices élémentaires.)
3. Montrer que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.

On s'interesse maintenant au lien entre matrices et applications linéaires en dimensions finies.

Définition 5.12 – *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, respectivement égales à n et m et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient en outre $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de de E et $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ une base de $\mathcal{F}$. La matrice représentative de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est la matrice $(a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ dont les coefficients sont définis par :*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad \textit{pour} \quad 1 \le j \le n.$$

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$*. Lorsque $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est appelée la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{E}$ et est notée* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$*.*

Remarque 5.13 – On reprend les notations de la definition 5.12. Soit $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in E$. Si $y = y_1f_1 + \ldots + y_mf_m$ est l'image de x par f, on a

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le m.$$

Exercice 5.14 – Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des bases de E et F, respectivement. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} & : & \mathcal{L}_K(E, F) & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 5.15 – Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{F}^*$ désignent les bases duales de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement, alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*}({}^t f) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

On passe à la notion de matrice représentative d'un vecteur (ou d'une famille finie de vecteurs) dans une base donnée.

Définition 5.16 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, égale à n et $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Si $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une famille de vecteurs de E, on appelle matrice représentative de la famille $\{x_1, \ldots, x_p\}$ dans la base $\mathcal{E}$ la matrice $(a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, dont les coefficients sont définis par :*

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad \textit{pour} \quad 1 \le j \le p.$$

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_p)$*.*

Remarque 5.17 – Avec les notations de la définition 5.12, on a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Proposition 5.18 – *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, respectivement égales à n et m, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ une base de $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition 5.19 – *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires, $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Démonstration : Exercice. ■

Exercice 5.20 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, égal à n et $\mathcal{E}$ une base de E.
1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} & : & \mathcal{L}_K(E) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}$ induit par restriction un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc} GL_{\mathbb{K}}(E) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \end{array}.$$

Il est clair que la matrice associée à une application linéaire ou à une famille de vecteurs dépend de façon cruciale du choix des bases de référence. On fait maintenant le lien entre les matrices obtenues pour des choix de bases différents. La clef est la notion de matrice de passage.

Définition 5.21 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, égal à n. Soient en outre $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ des bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, notée $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$, est définie par :*

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(e'_1, \ldots, e'_n).$$

Pour démontrer les résultats que nous énonçons ci-dessous, il est commode d'interpréter une matrice de passage comme matrice d'un endomorphisme. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 5.22 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, égal à n. Soient en outre $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ des bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ est la matrice représentative de l'application identité de E dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}_E).$$

Proposition 5.23 – *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et non nulle. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ des bases de E. On a les résultats suivants ;*
1. la matrice $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$;
2. pour tout vecteur x de E,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x) \ ;$$

3. $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}''} = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''}$.

Démonstration : On peut procéder par calcul explicite en revenant aux définitions. Mais c'est fastidieux. Une autre approche consiste à utiliser systématiquement le résultat de l'exercice 5.22. Par exemple, le troisième point se déduit immédiatement de la proposition 5.19 via l'exercice 5.22. ■

Proposition 5.24 – *Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie et non nulle. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux bases de F et $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ deux bases de G. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}.$$

Démonstration : Même commentaire que pour la proposition 5.23. ■

Corollaire 5.25 – *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et non nulle et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}.$$

On s'intéresse maintenant à deux scalaires que l'on peut attacher à une matrice, sa trace et son rang.

Définition 5.26 – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. La trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est définie par*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exercice 5.27 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. L'application $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est linéaire.
2. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Il résulte de l'exercice 5.27 que, si A et P sont des matrices $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) avec P inversible, on a $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$. On peut donc, en vertue du corollaire 5.25, poser la définition suivante.

Définition 5.28 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit la trace de f, notée $Tr(f)$ comme la trace de la matrice représentative de f dans une base de E choisie arbitrairement.*

On passe maintenant à la notion de rang d'une matrice. On va définir le rang d'une matrice à l'aide de la notion de rang d'une application linéaire, introduite plus haut. Pour cela, on commence par une remarque très importante.

Remarque 5.29 – Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Choisissons arbitrairement, d'une part, un espace vectoriel E de dimension n, une base $\mathcal{E}$ de E et, d'autre part, un espace vectoriel F de dimension m et une base $\mathcal{F}$ de F. Il découle du théorème 2.12 qu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et une seule telle que,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = A.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.30 – *On reprend les notations de la remarque 5.29. Si f et g sont deux applications linéaires obtenues pour des choix (éventuellement) différents de E, F, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, alors f et g ont même rang.*

On peut donc poser la définition suivante.

Définition 5.31 – *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$*. Le rang de* A*, noté* $\mathrm{rg}(A)$*, est le rang de l'application linéaire associé comme dans la remarque 5.29 à un choix arbitraire de* E*,* F*,* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$*.*

Remarque 5.32 –
1. Il découle immédiatement de la définition que le rang d'une matrice de format $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) est majoré par m et n.
2. Il découle immédiatement de la proposition 4.13 et du résultat de l'exercice 5.15 qu'une matrice et sa transposée ont le même rang.
3. Dans la pratique, lorsqu'on veut calculer le rang d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on considère le plus souvent les espaces vectoriels $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ et leurs bases canoniques.

Le critère suivant peut s'avérer utile pour calculer le rang d'une matrice. Il utilise les notions de matrice extraite et de matrice bordante d'une matrice extraite que l'on rappelle maintenant.

Définition 5.33 – *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$*. Considérons deux entiers* $1 \le p \le m$*,* $1 \le q \le n$ *et* p *entiers* $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le m$ *ainsi que* q *entiers* $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$*. La matrice extraite de* A *correspondant au choix des entiers* $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le m$ *et* $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ *est la matrice de format* $p \times q$ *dont le coefficient de ligne* α *et de colonne* β *est* a_{i_α, j_β}*.*

Plus concrètement, la définition 5.33 signifie que la matrice extraite correspondant au choix de p lignes et q colonnes de A est celle obtenue en effaçant les autres lignes et colonnes de A.

Définition 5.34 – *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$*. Si* B *est une matrice extraite de* A*, carrée de format* $r \times r$ *(*$r \le \min\{m, n\}$*), on appelle matrice bordante de* B *toute matrice extraite de* A*, de format* $(r+1) \times (r+1)$ *dont* B *soit une matrice extraite.*

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.35 – *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$*,* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *non nulle et* r *un entier tel que* $1 \le r \le \min\{m, n\}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathrm{rg}(A) = r$ *;*
(ii) il existe une matrice carrée inversible $r \times r$ *extraite de* A *dont toutes les matrices bordantes sont non inversibles.*

Corollaire 5.36 – *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *non nulle. Le rang de* A *est le plus grand entier* r *compris entre* 1 *et* $\min\{m, n\}$ *tel qu'il existe une matrice carrée de format* $r \times r$ *extraite de* A *qui soit inversible.*

On poursuit avec les notions de matrices équivalentes et de matrices semblables.

Définition 5.37 –
1. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$*. Deux matrices* A *et* B *de format* $m \times n$ *sont dites équivalentes si il existe une matrice* $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ *et une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telles que* $B = QAP$*.*
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$*. Deux matrices* A *et* B *de format* $n \times n$ *sont dites semblables si il existe une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telle que* $B = P^{-1}AP$*.*

Exercice 5.38 – *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\sim$ définie sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ par $A \sim B$ si et seulement si A et B sont des matrices équivalentes est une relation d'équivalence sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$.*

Le théorème suivant est très important.

Théorème 5.39 – *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Soit $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La matrice A est de rang $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la i-ième ligne et la i-ième colonne pour $1 \le i \le r$.
2. Deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

On aborde, enfin, la résolution des systèmes linéaires.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Un système à m équations et n inconnues est la donnée d'un couple (A, b) de matrices, où $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{K})$. Posons $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$. Résoudre ce système c'est déterminer tous les éléments $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ satisfaisant les m relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'application linéaire dont la matrice représentative dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ est A. Il est clair que l'ensemble des solutions du système ci-dessus est le sous-ensemble $f^{-1}(\{(b_1, \dots, b_m)\})$ (ensemble des antécédents par f de $(b_1, \dots, b_m)$). Ainsi, l'ensemble des solutions est de l'un des type suivant :
1. vide ; c'est le cas où $(b_1, \dots, b_m) \notin \mathrm{im} f$;
2. singleton ; c'est le cas où $(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{im} f$ et f est injective ;
3. infini ; c'est le cas où $(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{im} f$ et f n'est pas injective.

Définition 5.40 – *Un système est dit compatible si l'ensemble de ses solutions est non vide.*

On dit que le système est homogène lorque la matrice b est nulle. Dans ces conditions, il est clair que l'ensemble des solutions du système n'est autre que le noyau de f.

Définition 5.41 – *Soit $S = (A, b)$ un système. On appelle rang du système S celui de la matrice A.*

On commence par un cas particulièrement simple.

Définition 5.42 – *Soit $S = (A, b)$ un système à m équations n inconnues. On dit que S est un système de Cramer si $m = n$ et si A est inversible.*

Il est clair alors qu'on a le résultat suivant.

Théorème 5.43 – *Un système de Cramer admet une solution et une seule.*

Lorsqu'on souhaite résoudre un système, deux questions se posent. La première est l'existence de solutions, la seconde est leur détermination. Une notion clé est alors celle de sous-système d'équations principales.

Soit $S = (A, b)$ un système de m équations linéaires à n inconnues. Si $r \in \mathbb{N}^*$ est le rang de ce système, il existe une matrice extraite de A, carrée et inversible de format $r \times r$. Quitte à renuméroter les équations et les inconnues, on peut supposer que la matrice extraite

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

est inversible. Dans ces conditions, les r premières équations et les r premières inconnues de S sont dites *principales.*

On a alors les deux résultats suivants qui résolvent (du moins théoriquement) les problèmes d'existence et de détermination des solutions du système considéré.

Théorème 5.44 – *On reprend les notations ci-dessus. Le système S admet des solutions si et seulement si les $m - r$ matrices suivantes sont non inversibles :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,r} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & b_r \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,r} & b_k \end{pmatrix}$$

où $r + 1 \leq k \leq m$.

Le résultat suivant est souvent appelé théorème de Rouché-Fontené.

Théorème 5.45 – *On reprend les notations ci-dessus. Si le système S admet des solutions, l'ensemble de ses solutions coïncide avec l'ensemble des solutions du sous-système de ses r premières équations (équations principales). Pour résoudre ce sous-système, on donne des valeurs arbitraire aux inconnues non principales et les inconnues principales sont alors déterminées par un système de Cramer.*

6 Applications multilinéaires, déterminants.

On commence par de brefs rappels sur le groupe symétrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n. Rappelons que, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ. Il s'agit du nombre défini par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

L'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

On introduire maintenant la notion d'application multilinéaire.

Définition 6.1 – *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, \ldots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
1. Une application $\phi : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F$ est dite p-linéaire si, pour tout indice $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tous $x_j \in E_j$, $j \in \{1, \ldots, p\} \backslash \{i\}$, l'application partielle $E_i \longrightarrow F$, $x \mapsto \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ est linéaire.
2. Une forme p-linéaire est une application p-linéaire $\phi : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow \mathbb{K}$.

Remarque 6.2 – Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, \ldots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Il découle immédiatement de la définition que si $\phi : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F$ est une forme p-linéaire, alors pour tout p-uple $(a_1, \ldots, a_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ dont l'un des vecteurs a_i est nul, on a $\phi(a_1, \ldots, a_p) = 0$.

On se concentre maintenant sur le cas où, dans les notations ci-dessus, $E_1 = E_2 = \ldots = E_p$ et $F = \mathbb{K}$.

Définition 6.3 – *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme p-linéaire sur E est une application*

$$\phi \quad : \quad \overbrace{E \times \ldots \times E}^{p\text{-fois}} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}$$

p-linéaire.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi : E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme p-linéaire sur E. Si σ est une permutation on considère l'application p-linéaire

$$\sigma^*(\phi) : E \times \ldots \times E \longrightarrow F$$

définie de la façon suivante. Pour $(x_1, \ldots, x_p) \in E \times \ldots \times E$, $\sigma^*(\phi)(x_1, \ldots, x_p) = \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$. On remarquera que, pour $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_p$, on a $(\tau\sigma)^*(\phi) = \tau^*(\sigma^*(\phi))$.

Avec ces notations, on pose la définition suivante.

Définition 6.4 – *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi : E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme p-linéaire sur E.*
1. On dit que ϕ est symétrique si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $\sigma^*(\phi) = \phi$.
2. On dit que ϕ est antisymétrique si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $\sigma^*(\phi) = \varepsilon(\sigma)\phi$.
3. On dit que ϕ est alternée si $\phi(x_1, \ldots, x_p) = 0$ pour tout p-uple $(x_1, \ldots, x_p) \in E \times \ldots \times E$ tel que les $x_1, \ldots, x_p$ ne soient pas deux-à-deux distincts.

Exercice 6.5 – Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si ϕ est une forme p-linéaire alternée sur E et si $(a_1, \ldots, a_p)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $\phi(a_1, \ldots, a_p) = 0$.

La proposition suivante donne une caractérisation utile des formes p-linéaires alternées. Elle a des conséquences pratiques dans le calcul des déterminants.

Proposition 6.6 – *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et ϕ une forme p-linéaire sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) ϕ est alternée ;
(ii) pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_p$, on a $\tau^*(\phi) = -\phi$;
(iii) pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_p$, on a $\sigma^*(\phi) = \varepsilon(\sigma)\phi$.

Démonstration : Exercice. On pourra utiliser le fait que le groupe symétrique est engendré par l'ensemble des transpositions. ■

Remarque 6.7 – Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\bigwedge_p^*(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E. On peut définir une addition et un produit externe à scalaires dans $\mathbb{K}$ sur $\bigwedge_p^*(E)$. Soient $\phi, \psi \in \bigwedge_p^*(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $\phi + \psi : E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, $(a_1, \ldots, a_p) \mapsto \phi(a_1, \ldots, a_p) + \psi(a_1, \ldots, a_p)$ et $\lambda\phi : E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, $(a_1, \ldots, a_p) \mapsto \lambda\phi(a_1, \ldots, a_p)$. On montre facilement que $(\bigwedge_p^*(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Nous allons concentrer notre attention sur l'étude de l'espace vectoriel $\bigwedge_n^*(E)$ des formes n-linéaires alternées sur l'espace vectoriel E de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). C'est la clef pour introduire la notion de déterminant.

Exercice 6.8 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. A toute base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, nous associons l'application

$$\begin{array}{rccl} \det_{\mathcal{E}} : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{array}$$

où, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_j = a_{1j}e_1 + \ldots + a_{nj}e_n$ est la décomposition de a_j dans la base $\mathcal{E}$.
1. Montrer que l'application $\det_{\mathcal{E}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. (On pourra utiliser le critère de la proposition 6.6.)
2. Montrer que $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Exercice 6.9 –
1) On suppose $n = 2$. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Montrer que, si $a_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ et $a_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$ sont deux vecteurs de E, on a $\det_{\mathcal{E}}(a_1, a_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. (On rappelle que $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}_2, (1,2)\}$.)
2) On suppose $n = 3$. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Montrer que, si $a_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$, $a_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$ et $a_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$ sont trois vecteurs de E, on a $\det_{\mathcal{E}}(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23}$. (On rappelle que $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}_3, (1,2), (1,3), (2,3), (123), (132)\}$.)

Le résultat suivant est fondamental. Il permet, en particulier, d'établir un lien entre $\det_{\mathcal{E}}$ et $\det_{\mathcal{E}'}$ pour deux bases différentes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

Théorème 6.10 – *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors* $\dim \bigwedge_n^*(E) = 1$.

Remarque 6.11 –
1) On reprend les notations précédentes. Dans la preuve du théorème 6.10 on est amené à montrer que, si ϕ est une forme n-linéaire alternée de l'espace E de dimension n et si $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors $\phi = \phi(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{E}}$. Cela entraîne, en particulier, qu'il existe une unique application ϕ de $\bigwedge_n^*(E)$ qui prend la valeur 1 sur le n-uple $(e_1, \ldots, e_n)$, à savoir $\det_{\mathcal{E}}$.
2) On reprend les notations précédentes et on considère en outre une autre base de E, notée $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. On peut lui attacher un nouvel élément de $\bigwedge_n^*(E)$, à savoir $\det_{\mathcal{E}'}$. Ce qui précède montre que $\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{E}}$.

On peut maintenant définir la notion de déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

Définition 6.12 – *Soit* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *une base de* E *et* $(a_1, \dots, a_n)$ *un* n*-uple d'éléments de* E*, on appelle déterminant de* $(a_1, \dots, a_n)$ *dans la base* $\mathcal{E}$*, le scalaire* $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n)$*.*

Remarque 6.13 – Il est clair que le déterminant de $(a_1, \dots, a_n)$ dépend du choix de la base dans laquelle il est calculé. En vertu de 6.11, si $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une autre base de E, le déterminant de $(a_1, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{E}'$ est lié au déterminant de $(a_1, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{E}$ par $\det_{\mathcal{E}'}(a_1, \dots, a_n) = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n)$. C'est-à-dire que $\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{E}}$.

Nous définissons maintenant le déterminant d'une matrice.

Définition 6.14 – *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$*, on appelle déterminant de* A *le scalaire noté* $\det A$ *et défini par* $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Remarque 6.15 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, égale à $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On considère une famille $\{a_1, \dots, a_n\}$ de vecteurs de E. Par définition, on a

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n).$$

Pour définir la notion de déterminant d'un endomorphisme il est nécessaire de montrer un résultat préliminaire. Pour ce faire, on utilise les notations suivantes. Soit ϕ une forme n-linéaire alternée de E et u un endomorphisme de E, on note ϕ_u l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par $\phi_u(a_1, \dots, a_n) = \phi(u(a_1), \dots, u(a_n))$ pour tout n-uple $(a_1, \dots, a_n)$. Il est très facile de montrer que ϕ_u est encore une forme n-linéaire alternée.

Proposition 6.16 – *Soit* u *un endomorphisme de* E*. Il existe un scalaire* $k_u \in \mathbb{K}$ *tel que, pour toute forme* n*-linéaire alternée* ϕ *de* E*, on ait* $\phi_u = k_u \phi$*.*

Démonstration : Soit ϕ une forme n-linéaire alternée non nulle de E et u un endomorphisme de E. D'après 6.10, $\bigwedge_n^*(E)$ est de dimension 1. Il existe donc $k_{u,\phi} \in \mathbb{K}$ tel que $\phi_u = k_{u,\phi}\phi$. Pour prouver le théorème, on doit montrer qu'en réalité, $k_{u,\phi}$ ne dépend pas de ϕ. Soit donc ψ une autre forme n-linéaire alternée non nulle. On a de même $\psi_u = k_{u,\psi}\psi$. De plus, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\phi$ (cf. 6.10). On montre facilement qu'alors $\psi_u = \lambda\phi_u$ Ainsi, $k_{u,\psi}\lambda\phi = k_{u,\psi}\psi = \psi_u = \lambda\phi_u = \lambda k_{u,\phi}\phi$. Il s'ensuit que $k_{u,\psi} = k_{u,\phi}$. On note k_u la valeur commune des $k_{u,\psi}$ et on a donc $\phi_u = k_u\phi$ pour toute forme n-linéaire alternée ϕ non nulle. Comme cette relation reste vraie si $\phi = 0$, la preuve est complète. ■

D'après la proposition précédente, la définition suivante à un sens.

Définition 6.17 – *Soit* u *un endomorphisme de* E*, on appelle déterminant de* u *le scalaire noté* $\det u \in \mathbb{K}$ *et tel que pour tout* $\phi \in \bigwedge_n^*(E)$ *on ait* $\phi_u = (\det u)\phi$.

Remarque 6.18 – Soit u un endomorphisme de E.
1) Si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, on doit avoir $(\det_{\mathcal{E}})_u = (\det u) \det_{\mathcal{E}}$. En particulier, $(\det_{\mathcal{E}})_u(e_1, \dots, e_n) = (\det u)\ \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = \det u$. Donc,

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

2) Soit $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et A la matrice de u relativement à $\mathcal{E}$. En reprennant la définition de $\det A$ et celle de $\det_{\mathcal{E}}$, on montre facilement que $\det u = \det A$.

Nous terminons par quelques propriétés immédiates du déterminant.

Proposition 6.19 – *Soient u et v des endomorphismes de E, on a les propriétés suivantes :*
(i) $\det \mathrm{id}_E = 1$ *;*
(ii) $\det(uv) = \det u \, \det v$ *;*
(iii) $\det u \neq 0$ *ssi u est inversible, et si u est inversible,* $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$.

Démonstration : Le point (i) découle immédiatement de 6.18. Pour obtenir (ii), il suffit de remarquer que, si ϕ est une forme n-linéaire alternée et u et v deux endomorphismes de E, on a $(\phi_v)_u = \phi_{v \circ u}$ et d'appliquer la définition de déterminant d'un endomorphisme. Prouvons le point (iii). On suppose d'abord que u est inversible, alors (i) et (ii) montrent que $\det(u)\det(u^{-1}) = \det(uu^{-1}) = \det \mathrm{id}_E = 1$. Donc, si u est inversible, $\det u \neq 0$ et $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$. Il reste donc à prouver que si $\det u \neq 0$, u est inversible. Montrons la contraposée : si u n'est pas inversible alors $\det u = 0$. C'est facile : considérons une base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Dire que u n'est pas inversible entraîne que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est liée. Or, on a vu en 6.5 que ceci conduit à $\det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = 0$. Joint au fait que $\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = 0$ (cf. 6.18), on a $\det u = 0$. ■

La proposition 6.19 à la conséquence suivante, très importante car elle montre que le déterminant d'une famille de n vecteurs permet de déterminer si cette famille est libre.

Corollaire 6.20 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}$ une base de E. Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une famille de n vecteurs de E. Alors, $\{a_1, \dots, a_n\}$ est libre si et seulement si* $\det_{\mathcal{E}}\{a_1, \dots, a_n\} \neq 0$.

Démonstration : Exercice très instructif. On pourra considérer l'endomorphisme de E défini par : pour $1 \leq i \leq n$, $u(e_i) = a_i$ et appliquer la proposition 6.19. ■

Proposition 6.21 – *Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on a les propriétés suivantes :*
(i) $\det \mathrm{I}_n = 1$ *;*
(ii) $\det(AB) = \det A \, \det B$ *;*
(iii) $\det A \neq 0$ *ssi A est inversible, et si A est inversible,* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ *;*
(iv) si $\lambda \in \mathbb{K}$; alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Démonstration : Si on fixe une base de E, A et B peuvent être considérés comme les matrices représentatives de deux endomorphismes u et v de E relativement à cette base. Il reste à combiner le second point de 6.18 et 6.19 pour démontrer les points (i), (ii) et (iii). Le point (iv) se déduit immédiatement de la définition du déterminant d'une matrice. ■

Les propriétés suivantes sont utiles dans la pratique.

Proposition 6.22 – *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$; alors* $\det A = \det {}^tA$.

Démonstration : Cette propriété se déduit de la définition du déterminant d'une matrice. ■

Remarque 6.23 – La proposition précédente permet de transférer des colonnes aux lignes les procédés de calcul liés à la n-linéarité du déterminant et au fait qu'il est alterné. Ainsi, si une des lignes est combinaison linéaire des autres, le déterminant de la matrice est nul. De même, on sait que si l'on permute deux colonnes dans une matrice, le déterminant change de signe (cf. 6.6). La même propriété est donc vraie pour les lignes, etc.

On décrit maintenant des méthodes pratiques de calcul des déterminants.

On commence par une définition utile.

Définition 6.24 – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $1 \leq p \leq n$, on appelle mineur de format $p \times p$ tout déterminant d'une matrice extraite de A de format $p \times p$.*

La première règle de calcul est dite *règle de calcul par bloc.*

Proposition 6.25 – *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_q(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $p + q = n$. Alors, $\det M = (\det A)(\det B)$.

La seconde règle de calcul est dite *règle de développement suivant une rangée.* Elle nécessite d'introduire un peu de vocabulaire.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$, on note $A_{i,j}$ la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en ignorant la ligne i et la colonne j dans A. Par ailleurs, on appelle cofacteur du coefficient $a_{i,j}$ de A le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{i,j}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 6.26 – *Avec les notations précédentes :*
(1) $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}$ (développement suivant la j-ème colonne) ;
(2) $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}$ (développement suivant la i-ème ligne).

On termine par un théorème qui permet le calcul des inverses de matrices. Pour ceci, a toute matrice A, on associe sa comatrice $\mathrm{com}A$ dont le terme de i-ème ligne et j-ème colonne est le cofacteur de a_{ij}, c'est-à-dire $(-1)^{i+j} \det A_{i,j}$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 6.27 – *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^t(\mathrm{com}A) = {}^t(\mathrm{com}A)A = (\det A)I_n$.*

Corollaire 6.28 – *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\mathrm{com}A).$$

Les résultats sur le déterminant d'une matrice décrits ci-dessus permettent de reformuler et préciser certains énoncés de la section 5 portant sur le rang. C'est le cas, en particulier, du théorème 5.35 et de son corollaire 5.36. Il s'ensuit des reformulations de certains résultats portant sur la résolution des systèmes linéaires comme le théorème 5.44.

En outre, on a le résultat suivant, qui donne des formules explicites, dites *formules de Cramer*, pour les solutions des systèmes de Cramer.

Soit (A, b) un système de Cramer à n équations et n inconnues (*i.e.*, $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $b = (b_i) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec A inversible). Pour $1 \leq i \leq n$, notons B_i la matrice obtenue en substituant l'unique colonne de b à la i-ième colonne de A. Alors, si l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ l'unique solution du système (A, b), on a

$$\forall\, 1 \leq i \leq n,\ x_i = \frac{\det B_i}{\det A}.$$

Pour référence ultérieure, on termine ce chapitre par la définition de la notion d'*orientation* pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Si $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ sont deux bases de E, on a

$$\det_{\mathcal{E}}(e'_1, \ldots, e'_n) = \det P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}.$$

A l'aide de la proposition 6.21, on montre que la relation binaire portant sur l'ensemble de toutes les bases de E et définie, pour deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, par

$$\mathcal{E}\,\mathcal{R}\,\mathcal{E}' \quad \text{si} \quad \det P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} > 0$$

est une relation d'équivalence. Il est clair que cette relation d'équivalence détermine deux classes d'équivalence. Orienter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E signifie choisir une de ces deux classes. Les bases de la classe choisie sont dites *directes*, celles de l'autre classe sont dites *indirectes*.

7 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 7.1 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$.*

Exercice 7.2 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E. Montrer que si u et v commutent (*i.e.* $u \circ v = v \circ u$), alors $\mathrm{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.

Définition 7.3 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.*
1. Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un élément de $\mathbb{K}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \ldots + a_n u^n$.
2. On appelle polynôme de l'endomorphisme u tout élément v de $\mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $v = P(u)$.

Exercice 7.4 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
1. Vérifier, à la main, que l'ensemble I_u des éléments P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et que le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui sont des polynômes de l'endomorphisme u est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ (c'est, en fait, la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u).
2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_u & : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En déduire que l'ensemble I_u des éléments P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et que le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui sont des polynômes de l'endomorphisme u est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que si E est de dimension finie, I_u n'est pas nul. (On pourra remarquer qu'alors $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.)

Remarque 7.5 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, l'idéal I_u est principal. Il s'ensuit qu'il existe un unique polynôme unitaire μ_u de $\mathbb{K}[X]$, appelé polynôme minimal de u, tel que I_u soit l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par μ_u. Bien qu'il soit passé sous silence dans la suite de ce résumé, le polynôme minimal est important pour prouver certains résultats apparaissant dans la suite et concernant les sous-espaces caractéristiques.

Proposition 7.6 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P, Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors, on a $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.*

Démonstration : Exercice très instructif. On pourra considérer une identité de Bézout entre P et Q. ∎

Définition 7.7 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.*
1. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de E si $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de E, on appelle vecteur propre de u de valeur propre λ tout élément non nul de $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Proposition 7.8 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont p valeurs propres de u deux-à-deux distinctes, alors la somme des sous-espaces propres associés à ces vecteurs propres est directe.*

Démonstration : Exercice facile. ∎

On passe maintenant à la reduction des endomorphismes.

Dans toute la suite de cette section, on se limitera au cas de la dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On peut considérer l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(u - x\mathrm{id}_E) \end{array}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette application est polynomiale de degré $\dim E$. (On peut calculer $\det(u - x\mathrm{id}_E)$ comme le déterminant d'une matrice après avoir choisi une base arbitraire.) Le polynôme associé à cette fonction polynomiale est noté P_u.

Définition 7.9 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomrphisme de E. Dans les notations ci-dessus, P_u est appelé le polynôme caractéristique de u.*

Lemme 7.10 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) λ est valeur propre de u ;
(ii) λ est racine de P_u.

Démonstration : Exercice facile et très instructif. ∎

Ainsi, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E admettant p valeurs propres distinctes ($p \in \mathbb{N}^*$) et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignent ces valeurs propres, il existe des entiers strictement positifs $m_1, \dots, m_p$ (à savoir les ordres de multiplicité respectives des racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de P_u) tels que l'on ait :

$$P_u = \prod_{1 \leq i \leq p} (X - \lambda_i)^{m_i} Q,$$

où Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$ n'admettant pas de racines dans $\mathbb{K}$.

On commence par aborder le problème de la trigonalisation des endomorphismes.

Définition 7.11 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable si il existe une base de E relativement à laquelle la matrice représentative de u est triangulaire supérieure.*

Théorème 7.12 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors, u est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration : Elle sera traitée en T.D. ∎

On passe maintenant au problème de la diagonalisation des endomorphismes.

Définition 7.13 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u. On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ de u l'ordre de multiplicité de λ comme racine de P_u.*

Proposition 7.14 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ. On a :*

$$1 \leq \dim \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \leq m_\lambda.$$

Démonstration : Exercice très instructif. On pourra considérer une base de $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$, la compléter en une base de E, et calculer P_u à l'aide la matrice de u relativement à cette base. ∎

Le théorème suivant est très important.

Théorème 7.15 (Cayley-Hamilton) – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors, $P_u(u) = 0$.*

Définition 7.16 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si il existe une base de E relativement à laquelle la matrice représentative de u est diagonale.*

Lemme 7.17 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ;
(iii) E est somme (directe) des sous-espaces propres de u.

Démonstration : Facile et très important. ∎

Exercice 7.18 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable, le polynôme caractéristique de u est scindé.

Théorème 7.19 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et toute valeur propre λ a pour multiplicité la dimension de* $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Démonstration : Appliquer le lemme 7.17. ■

Corollaire 7.20 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de u est scindé et n'a que des racines simples, alors u est diagonalisable.*

Démonstration : Conséquence immédiate du théorème 7.19. ■

Théorème 7.21 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé, n'ayant que des racines simples et tel que $P(u) = 0$.*

Démonstration : Voici les idées principales de la démonstration ; on laisse les détails en exercice.
1. Supposons u diagonalisable et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) ses valeurs propres deux-à-deux distinctes. Posons $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$. On vérifie facilement que $P(u) = 0$. (Par exemple, on peut montrer que $P(u)$ annule tous les éléments d'une base de E constituée de vecteurs propres de u.)
2. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) deux-à-deux distinctes tels que, si $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$, on ait $P(u) = 0$. En appliquant la proposition 7.6, on obtient que $E = \ker(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \oplus \ldots \oplus \ker(u - \lambda_p \mathrm{id}_E)$. ■

Lorsqu'on a affaire à un endomorphisme qui n'est pas diagonalisable, on peut tout de même le réduire, si toutefois son polynôme caractéristique est scindé, de façon très satisfaisante. Par exemple, on peut le trigonaliser (cf. théorème 7.12). Mais, en fait, on peut obtenir une réduction bien meilleure (cf. théorème 7.25). C'est ce que l'on va voir maintenant.

Pour cela, la notion pertinente est celle de sous-espace caractéristique.

Définition 7.22 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ est* $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)^m$.

Exercice 7.23 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
1. Les sous-espaces caractéristiques de u sont stables par u.
2. Les sous-espaces caractéristiques de u sont en somme directe. (On pourra utiliser la proposition 7.6.)

Dans toute la suite de cette section, on va donc s'intéresser au cas d'un endomorphisme u de l'espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on suppose que P_u est scindé. On fixe alors les notations suivantes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) désignent les p valeurs propres (deux-à-deux distinctes) de u, dont les multiplicités sont notées $m_1, \ldots, m_p$. Ainsi, on a :

$$P_u = (-1)^n \prod_{1 \le i \le p} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

De plus, pour $1 \leq i \leq p$, on note N_i le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

On a alors le théorème suivante, qui donne une première réduction très utile de u.

Théorème 7.24 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. On a alors :*
1. $E = N_1 \oplus \ldots \oplus N_p$;
2. pour $1 \leq i \leq p$, $\dim N_i = m_i$;
3. pour toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition de E du point 1, la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B_p \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \leq i \leq p$, $B_i \in M_{m_i}(\mathbb{K})$.

Démonstration : Le point 1 est une conséquence facile de la proposition 7.6. Pour le point 2, la preuve est plus délicate. On pourra utiliser le fait que toute valeur propre d'un endomorphisme est racine de son polynôme minimale, en déduire que, pour $1 \leq i \leq p$, la restriction de u à N_i admet λ_i pour seule valeur propre, puis calculer P_u dans une base adaptée à la décomposition de E en somme de sous-espaces caractéristiques. Le point 3 est se déduit facilement de l'exercice 7.23. ∎

Théorème 7.25 – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. On reprend les notations du théorème 7.24. On peut choisir $\mathcal{B}$ de sorte que, pour $1 \leq i \leq p$, la matrice B_i soit triangulaire supérieure et ait tous ses termes diagonaux égaux à λ_i.*

Démonstration : Se déduit des théorèmes 7.24 et 7.12. ∎

Théorème 7.26 (Décomposition de Dunford) – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que :*
1. $u = d + n$;
2. d est diagonalisable, u est nilpotent ;
3. d et n commutent.

Démonstration : Se déduit, avec un peu de travail (pour l'unicité), du théorème 7.25. ∎

On termine cette section en abordant brièvement la réduction (diagonalisation, trigonalisation, ...) des matrices carrées.

Définition 7.27 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
1. On dit que A est diagonalisable si il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$, inversible et telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
2. On dit que A est trigonalisable si il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$, inversible et telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On peut considérer l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(A - xI_n) \end{array}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette application est polynomiale de degré n. Le polynôme associé à cette fonction polynomiale est noté P_A.

Définition 7.28 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dans les notations ci-dessus, P_A est appelé le polynôme caractéristique de A.*

Le lien entre la réduction des matrices et celle des endomorphismes est fait dans l'exercice suivant.

Exercice 7.29 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
1. On considère une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, arbitrairement choisie, et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Montrer que A est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si u est diagonalisable (resp. trigonalisable). (Dans la pratique, on choisit le plus souvent la base canonique de $\mathbb{K}^n$.)
2. On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$. Soit u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans le base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) est A. Montrer que les valeurs propres de u et v sont les mêmes. On peut ainsi définir les valeurs propres de A comme étant les valeurs propres de l'endomorphisme dont A est la matrice représentative pour un choix de base abitraire.

8 *Exercices.*

§A - Espaces vectoriels.

Exercice 8.1 – Pour tout réel $r \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $\varepsilon_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\varepsilon_r(x) = e^{rx}$.
1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ deux-à-deux distincts. Montrer que la famille $\{\varepsilon_{a_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Indication. On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser une limite en $+\infty$.
2. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $\{\varepsilon_r\}_{r \in E}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8.2 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
1. Démontrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f)$.
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f(\operatorname{Ker} g) \subseteq \operatorname{Ker} g$ et $f(\operatorname{Im} g) \subseteq \operatorname{Im} g$.

Exercice 8.3 – On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et l'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (X+1)P - P(0)$.
1. Démontrer que f est linéaire. Calculer $f(P)(0)$ et $f(P)(-1)$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. On note $f^1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{n+1} = f \circ f^n$. Déterminer $\operatorname{Im} f^k$ pour tout entier $k \geq 2$.
4. Soit $g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(-1)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f)$.

Exercice 8.4 – Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-ensemble de E des applications constantes, G l'ensemble des applications dans E qui s'annulent sur $\mathbb{R}^+$ et H l'ensemble des applications dans E qui s'annulent sur $\mathbb{R}^-$. Montrer que F, G, H sont des sous-espace vectoriels de E et que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 8.5 – Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On considère un sous-espace vectoriel E' de E tel que E' et $\ker f$ soient supplémentaires. On considère en outre l'application linéaire $g : E' \longrightarrow \mathrm{im} f$ induite par f par restrictions des ensembles de départ et d'arrivée. Montrer que g est un isomorphisme.

Exercice 8.6 – Projections.
1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. On appelle projection sur E_1 parallèlement à E_2 l'application $p : E \longrightarrow E$ définie ainsi : pour tout $x \in E$, si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x = x_1 + x_2$, alors $p(x) = x_1$. Montrer que p est une application linéaire, que $\ker p = E_2$, que $\mathrm{im} p = E_1$ et que $p \circ p = p$.
2. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Montrer que si $f \circ f = f$, alors il existe des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E, supplémentaires dans E et tels que f soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 8.7 – Symétries.
1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s : E \longrightarrow E$ définie ainsi : pour tout $x \in E$, si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x = x_1 + x_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$. Montrer que s est une application linéaire bijective et que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.
2. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Montrer que si $f \circ f = \mathrm{id}_E$, alors il existe des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E, supplémentaires dans E et tels que f soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 8.8 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul. On note A le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ des applications f telles que $f^2 - 7f + 12\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que A est non vide. Dans la suite, on note f un élément de A.
1. Vérifier que $p = f - 3\mathrm{id}_E$ et $q = 4\mathrm{id}_E - f$ sont des projections de E.
2. Calculer $p \circ q$, $q \circ p$, $p + q$. En déduire que $E = \ker(f - 3\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 4\mathrm{id}_E)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer f^n en fonction de p et q.

Exercice 8.9 – Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective ;
(ii) l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de E ;
(iii) il existe une base de E dont l'image par f est une famille libre de E.
2. Énoncer et démontrer des caractérisations semblables de la surjectivité et de la bijectivité.

§B - Espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 8.10 –
1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 1, 3)$, $(1, m, 1)$ et $(-1, 1, -m)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
2. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 2, 1)$, $(4, 1, 1)$ et $(1, 5, 1)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(m, 1, 1)$, $(1, m, 1)$ et $(1, 1, m)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 8.11 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère un polynôme P_k de degré k.
1. Montrer que la famille $\{P_k\}_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par la famille $\{P_k\}_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 8.12 – Hyperplans : l'approche naïve.
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
1. On considère n éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathbb{K}$, qui ne sont pas tous nuls. Montrer que l'ensemble $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
2. Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe n éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathbb{K}$, qui ne sont pas tous nuls, tels que $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n éléments de $\mathbb{K}$ qui ne sont pas tous nuls et $b_1, \ldots, b_n$ n éléments de $\mathbb{K}$ qui ne sont pas tous nuls. Montrer que, si $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0\}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i = \lambda a_i$.

Exercice 8.13 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et l'application $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer le noyau et l'image de Δ.
2. On suppose $n \geq 2$. Résoudre les équations $\Delta(P) = 1$, $\Delta(P) = X$ et $\Delta(P) = X^2$ en l'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire, pour $m \in \mathbb{N}$, des expressions simples de $\sum_{k=0}^{m} k$ et $\sum_{k=0}^{m} k^2$.

Exercice 8.14 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'' + P$.
1. Etudier la linéarité de f, son injectivité, sa surjectivité.
2. Que peut-on en déduire sur les solutions polynomiales de l'équation différentielle $y'' + y = Q$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est donnée ?

Exercice 8.15 –
1. Soit k un réel. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x + 2y + kz, 2x + ky + 8z)$. Vérifier que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ telle que, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x + 2y - 3z, x + 3y - z, 2x + 5y - 5z, x + 4y - z)$. Vérifier que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.16 – Soit $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j = 0$ $(1 \leq i \leq p)$ un système de p équations linéaires homogènes à n inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que si $n > p$ il admet une solution non nulle. Que peut-on dire si $p \geq n$?

Exercice 8.17 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^2 = f \circ f$.
1. Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$ d'une part et $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$ d'autre part.
2. On suppose que E est de dimension finie.
2.1. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes : (1) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$; (2) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$; (3) $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2.2. Les propriétés (1) à (3) ci-dessus sont-elles satisfaites si f est un projecteur ? si f est un automorphisme ? pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$?
3. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$ et $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$, est la dérivation. Parmi les propriétés (1) à (3), lesquelles sont satisfaites ?
4. Les propriétés (1) à (3) sont-elles équivalentes si E n'est pas de dimension finie.

Exercice 8.18 – Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$ et V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que toute application linéaire $f : V \longrightarrow F$ se prolonge en une application linéaire $g : E \longrightarrow F$.

Exercice 8.19 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme non nul A de $\mathbb{C}[X]$, de degré au plus égal à n. On définit deux applications $q, r : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ de la façon suivante : pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $q(P)$ est le quotient et $r(P)$ le reste dans la division euclidienne de P par A. Montrer que q et r sont des applications linéaires et calculer leur noyau et leur image.

Exercice 8.20 – Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la droite vectoriel $D = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 2)\}$ et l'hyperplan $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.
1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
2. Déterminer l'expression de la projection sur P parallèlement à D.

Exercice 8.21 – On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et l'on pose $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0\}$.
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ l'application qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2). Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de E.
3. Déterminer toutes les suites géométriques appartenant à E. En déduire une base de E.
4. Déterminer l'élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = u_2 = 1$.
5. Soit $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid u_0 = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 8.22 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme u de E qui commute avec tout élément de $\mathcal{L}(E)$ (*i.e.*, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$).
1. Soit x un élément de E non nul. En complétant x en une base de E et en choisissant un endomorphisme judicieux de E, montrer qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
2. En déduire, à l'aide de la linéarité de u, que u est une homothétie.

Exercice 8.23 –
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Indication. On pourra considérer une base de l'espace vectoriel en question.
2. Montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Exercice 8.24 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) H est un hyperplan de E ;
(ii) pour tout $v \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}.v$;
(iii) il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}.v$.

Exercice 8.25 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base de E et une seule dont $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ soit la duale.

Exercice 8.26 – On pose $E = \mathbb{R}^3$; les formes linéaires ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 définies par $\phi_1((x, y, z)) = 2x - y + 3z$, $\phi_2((x, y, z)) = 3x - 5y + z$ et $\phi_3((x, y, z)) = 4x - 7y + z$ forment-elles une base de E^* ?

Exercice 8.27 – On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère trois formes linéaires sur E, ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2, définies par : $\forall P \in E$, $\phi_0(P) = P(0)$, $\phi_1(P) = P(1)$ et $\phi_2(P) = \int_0^1 P(t)dt$. La famille $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ est-elle une base de E^* ?

Exercice 8.28 – On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère les formes linéaires ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 définies par $\phi_1((x, y, z)) = 3x + y + 2z$, $\phi_2((x, y, z)) = 2x + y + 2z$ et $\phi_3((x, y, z)) = 6x + 2y + 5z$. Montrer que $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ est une base de E^* et déterminer la base de E dont elle est la duale.

Exercice 8.29 – On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère deux réels λ et μ. On définit trois formes linéaires sur E, ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3, par $\phi_1((x, y, z)) = x + \lambda y + \lambda^2 z$, $\phi_2((x, y, z)) = x + \mu^2 y + \mu z$ et $\phi_3((x, y, z)) = x + y + z$. Pour quels choix de λ et μ $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ est-elle une base de E^* ?

Exercice 8.30 – Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$. On définit les formes linéaires $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ de E^* par : $\forall P \in E$, $\phi_0(P) = P(0)$, $\phi_1(P) = P(1)$, $\phi_2(P) = P'(1)$, $\phi_3(P) = P(-1)$, $\phi_4(P) = P'(-1)$. Montrer que $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ est une base de E^* et déterminer la base de E dont elle est la duale.

Exercice 8.31 – Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de E. On considère les vecteurs $v_1 = (2, -1, 4, 0)$ et $v_2 = (-1, 0, 3, 4)$ de E et on pose $V = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$.
1. Montrer que $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, v_1, v_2\}$ est une base de E.
2. On note $\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^*, v_1^*, v_2^*\}$ la duale de $\mathcal{C}$. Montrer qu'un élément x de E est dans V si et seulement si $e_1^*(x) = e_2^*(x) = 0$.
3. Exprimer e_1^* et e_2^* comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}^*$ et en déduire une description de V par des équations.

Exercice 8.32 – On pose $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sa base canonique. Soit F le sous-espace de E engendré par les vecteurs $3e_1 - e_2 + e_4$ et $e_1 + e_3$. Déterminer les équations caractérisant F relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 8.33 – On pose $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sa base canonique. Soit F le sous-espace de E engendré par le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Déterminer les équations caractérisant F relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 8.34 – Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall P \in E$, $u(P)(X) = P'(X + 1) + P'(X - 1) - P'(X)$. Soit enfin $f \in E^*$ définie par : $\forall P \in E$, $f(P) = \int_0^1 P(t)dt$.
a) Déterminer $\phi =^t u(f)$, image de f par la transposée de u.
b) On définit les éléments $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$ de E^* par : $\forall P \in E$, $e_1^*(P) = P(0)$, $e_2^*(P) = P(1)$, $e_3^*(P) = P'(0)$, $e_4^*(P) = P'(1)$. Montrer que $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ forme une base de E^* et trouver la base dont elle et la duale.
c) Calculer les composantes de ϕ dans $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$.

Exercice 8.35 – Soit $E = \mathbb{R}^4$.
1) Déterminer l'orthogonal du sous-espace de E engendré par les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$.
2) Déterminer l'orthogonal du sous-espace de E intersection des hyperplans d'équations $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

Exercice 8.36 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Déterminer la base duale de la base canonique de E.

Exercice 8.37 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit par ailleurs $a \in \mathbb{K}$. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit $\phi_k \in E^*$ par $\forall P \in E$, $\phi_k(P) = P^{(k)}(a)$. Montrer que $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ est une base de E^* et déterminer la base de E dont elle est la duale.

Exercice 8.38 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si u est un endomorphisme de E, alors un scalaire α est valeur propre de u ssi α est valeur propre de la transposée de u.

Exercice 8.39 – On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère l'endomorphisme D de dérivation de E : $\forall P \in E$, $D(P) = P'$. Déterminer la transposée de D en donnant l'image par cette application d'une base de E^*.
Même question en substituant à D l'endomorphisme T défini par : $\forall P \in E$, $T(P)(X) = P(X+1)$.

Exercice 8.40 – **Polynômes d'interpolation de Lagrange.**
On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$. Si $a \in \mathbb{K}$, on définit $\phi_a \in E^*$ en posant : $\forall P \in E$, $\phi_a(P) = P(a)$.
1) On considère $n+1$ éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que les $n+1$ formes linéaires $\phi_{a_0}, \ldots, \phi_{a_n}$ sont linéairement indépendantes ssi les a_i sont deux-à-deux distincts.
2) On considère $n+1$ éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, deux-à-deux distincts. Déterminer la base $\{L_0, \ldots, L_n\}$ dont $\{\phi_{a_0}, \ldots, \phi_{a_n}\}$ est la duale.
3) On considère, à présent, deux familles de $n+1$ scalaires : $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ et on suppose que les éléments de $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ sont deux-à-deux distincts. Montrer qu'il existe un polynôme P de E et un seul tel que $P(a_i) = b_i$, pour $0 \leq i \leq n$.

Exercice 8.41 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
1. Soit S une partie de E. Montrer que $(S^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(S)$.
1. Soit T une partie de E^*. Montrer que $(T^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(T)$.

Exercice 8.42 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $L, \ell_1, \ldots, \ell_p$ des formes linéaires sur E.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\cap_{i=1}^p \ker \ell_i \subseteq \ker L$;
(ii) $L \in \mathrm{Vect}\{\ell_1, \ldots, \ell_p\}$.

Exercice 8.43 – Posons $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la forme linéaire sur E qui à un polynôme P de E associe son coefficient d'indice n.
1. Montrer que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E^*.
2. A quelle condition sur a a-t-on la forme linéaire $\mathrm{ev}_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a)$ est-elle dans $\mathrm{Vect}\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
3. La famille $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est elle génératrice de E^*.

Exercice 8.44 – **Crochet de dualité et bidual.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1. On appelle crochet de dualité l'application

$$\begin{array}{cccccc} \langle -, - \rangle & : & E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (x, \phi) & \mapsto & \phi(x) \end{array}.$$

Montrer que l'application $\langle -, - \rangle$ est bilinéaire.
2. On note E^{**} le bidual de E, c'est-à-dire le dual du dual de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccccc} J & : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & & x & \mapsto & \langle x, - \rangle \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où, pour $x \in E$, $\langle x, - \rangle : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$, $\phi \mapsto \langle x, \phi \rangle$.
Indication. Pour montrer que J est injective, on pourra montrer que, si x est un élément non nul, alors $J(x) \neq 0$. Pour ce faire, on pourra compléter $\{x\}$ en une base de E et construire une forme linéaire qui ne s'annule pas sur x.
3. En déduire le résultat suivant : si $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ une base de E^*. Il existe une base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E dont $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ est la base duale.

§C - Matrices.

Exercice 8.45 – Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice représentative de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.46 – Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ dont la matrice relativement aux bases canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^5$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 14 & 3 & -1 \\ 2 & 23 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.47 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à coefficients réels. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8.48 – On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ définis de la façon suivante. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (2x - 3y + 7z, x - y - z, 3x - y)$ et $g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$, $g(e_2) = 5e_1 + e_2 - 3e_3$, $g(e_3) = e_1 - e_3$. Déterminer le noyau et l'image de $g \circ f$.

Exercice 8.49 – Calculer le rang des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (où α et m sont des paramètres complexes) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.50 – Soit S le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs colonnes de la

matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension de S ?
2. Combien d'équations faut-il pour caractériser S ?
3. Donner une famille d'équations dont S soit l'ensemble des solutions.

Exercice 8.51 – La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si elle l'est, calculer son inverse.

Exercice 8.52 – Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dans $M_{m,n}(\mathbb{K})$, on note $\sim$ la relation de similitude (c-à-d celle définie, pour $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, par $A \sim B$ si A et B sont semblables). Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? (On demande de justifier la réponse.)
1. $A \sim B$ implique ${}^tA \sim {}^tB$;
2. $A \sim B$ implique $\lambda A \sim \lambda B$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $A \sim I_n$ implique que A est inversible.
4. $A \sim B$ et $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ implique que $A^{-1} \sim B^{-1}$.
5. $A \sim B$ et $C \sim D$ implique que $A + C \sim B + D$.
5. $A \sim B$ et $C \sim D$ implique que $AC \sim BD$.

§D - Déterminants.

Exercice 8.53 – Donner un moyen simple de calculer le déterminant d'une matrice triangulaire et d'une matrice diagonale.

Exercice 8.54 – Calculer $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.55 – Calculer A^{-1}, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.56 – Calculer $\det \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{K}$.

Exercice 8.57 – Déterminer les réels a tels que $\det \begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix} = 0$.

Exercice 8.58 – Calculer $\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$.

Exercice 8.59 – On considère n éléments de $\mathbb{K}$, $a_1, \ldots, a_n$. Calculer le déterminant de la matrice (dite de Vandermonde) :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.60 – Calculer

$$\det = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \ldots & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \ldots & b_2 & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \ldots & b_n & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.61 – Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.62 – Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ c & a & b & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & c & a & b & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & c & a & b \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire de degré 2.
2. Calculer D_n, $n \in \mathbb{N}^*$, pour $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$.

Exercice 8.63 – On appelle matrice circulante une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui a la forme suivante :

$$C(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des complexes. On désigne par $z_1, \ldots, z_n$ les racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et on pose $P(X) = a_1 + a_2X + a_3X^2 + \ldots + a_nX^{n-1}$. Enfin, on note U la transposée de la matrice de Vandermonde $V(z_1, \ldots, z_n)$.
1) Calculer $C(a_1, \ldots, a_n)U$.
2) En déduire l'expression de $\det C(a_1, \ldots, a_n)$ à l'aide de $P(z_1), \ldots, P(z_n)$.

Exercice 8.64 – **Déterminant par blocs.**
1. On veut montrer que si A et B désignent des matrices carrées et C une matrice, on a :

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A) \cdot (\det B).$$

1.1. Montrer le résultat si A n'est pas inversible.
1.2. On suppose A inversible. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

En déduire la formule.
1.3. Trouver quatre matrices carrées A, B, C, D de même taille telles que :

$$\det \begin{pmatrix} A & D \\ B & C \end{pmatrix} \neq (\det A) \cdot (\det C) - (\det B) \cdot (\det D).$$

2. Soient A, B, C, D quatre matrices carrées de même taille. On leur associe la matrice carrée :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On suppose que $CD = DC$.
2.1. On suppose que D est inversible. Montrer que $\det M = \det(AD - BC)$. Pour cela, on calculera $M \times \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.
2.2. On suppose D non inversible. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI \end{pmatrix}.$$

En utilisant la continuité de cette application, montrer qu'on a encore : $\det M = \det(AD - BC)$.
2.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $AB \neq BA$.
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, calculer $\det M$ et $\det(A^2 - B^2)$.

§E - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

Exercice 8.65 – Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$; les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) u est trigonalisable,
(ii) le polynôme caractéristique de u est scindé.
En fait, la démonstration de ce résultat fournit aussi un moyen pratique de trigonalisation.
1. Montrer que (i) implique (ii).
2. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique, P_u, est scindé.
2.1. Montrer que u admet une valeur propre.
2.2. Soit λ une valeur propre de u. Montrer que $\mathrm{im}(u - \lambda \mathrm{id})$ est une sous-espace vectoriel de E de dimension au plus égale à $n - 1$.
2.3. Montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que $\mathrm{im}(u - \lambda \mathrm{id}) \subseteq H$. Montrer que pour tout tel hyperplan, on a $u(H) \subseteq H$.

2.4. Montrer qu'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2.5. On note v la restriction de u à H. Montrer que le polynôme caractéristique de v est scindé.
2.6. Conclure.

Exercice 8.66 – des cas suivants, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Étudier la diagonalisabilité et la trigonalisabilité de u et, le cas échéant, diagonaliser ou trigonaliser u.

1. $A = \begin{pmatrix} -8/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8/5 & 0 & -2/5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.67 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 6/5 & -2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 9/5 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est diagonalisable et diagonaliser f.

Exercice 8.68 – On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est-il diagonalisable, trigonalisable ? Si oui, le diagonaliser, le trigonaliser. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.69 – Soient a, b deux complexes ; on pose $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs du couple (a, b) pour lequel A est non inversible.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque A n'est pas inversible. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

Exercice 8.70 – Trouver une matrice carrée M de $M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$ où A est la matrice de $M_4(\mathbb{C})$ dont tous les cefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. (On peut commencer par diagonaliser A.)

Exercice 8.71 – Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_4(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

Exercice 8.72 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u$.

Exercice 8.73 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout projecteur et que toute symétrie est diagonalisable.

Exercice 8.74 – On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$ pour $P \in E$.
1) Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E.
2) Déterminer les valeurs propres de ϕ.
3) Montrer que les vecteurs propres associés à la valeur propre $i(i + 1)$ sont des polynômes de degré i.

Exercice 8.75 – Pour chacune des matrices A suivantes, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$
- en utilisant la réduction de A,
- en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton ;

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}\ (a \in \mathbb{R}^*),\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$