NdT 28/11/20

Une identité utile

Cadre : $\mathbb{k}$ corps de caract. nulle.

* $\mathfrak{g}$ alg. de Lie sur $\mathbb{k}$, de dim finie.
* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ rep. de $\mathfrak{g}$ de dim. finie.
* $a \in \mathfrak{g}$, $ad_{\mathfrak{g}}$-nilpotent et tq $\phi(a)$ est un endo. nilpotent de V.
* $b \in \mathfrak{g}$, quelconque.

1) D'après le Lemme I.4.7 du cours, l'endomorphisme

$$ad(\phi(a)) : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

est nilpotent. On peut donc considérer l'automorph.

$$\exp\left(ad(\phi(a))\right) : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\phi\left((ad(a))^n(b)\right) = \left(ad(\phi(a))\right)^n\left(\phi(b)\right)$$

En effet : pour $n=0$ c'est trivial, pour $n=1$ c'est dû au fait que ϕ est un morph. d'alg. de Lie et on conclut par récurrence sur n.

Il s'ensuit que, ds $\mathfrak{gl}(V)$, on a l'égalité :

$$\boxed{\exp\left(ad(\phi(a))\right)\left(\phi(b)\right) = \phi\left(\exp(ad(a))(b)\right)}.$$

(*)

2) Comme $\phi(a)$ est nilpotent, on peut considérer

$$\exp(\phi(a)) : V \longrightarrow V \quad \text{et} \quad \exp(-\phi(a)) : V \longrightarrow V$$

qui sont des automorphismes d'e.v. de V.

On peut aussi considérer l'endomorph.

$$\boxed{\exp(\phi(a))\,\phi(b)\,\exp(-\phi(a)) : V \longrightarrow V}$$

(*)

3) Le <u>but</u> de ce § est de mq :

$$\exp(\phi(a))\,\phi(b)\,\exp(-\phi(a)) = \exp\left(ad(\phi(a))\right)(\phi(b)) .$$

3.1) Sit $p \in \mathbb{N}$ tq $\phi(a)^n = 0$ pour $\forall\, n > p$.

on a donc $(-\phi(a))^n = 0$ " " " .

Donc :

$$\exp(\phi(a)) = \sum_{0 \leq i \leq p} \frac{1}{i!}\,\phi(a)^i$$

et

$$\exp(-\phi(a)) = \sum_{0 \leq i \leq p} \frac{1}{i!}\,\phi(-a)^i .$$

Pcsq :

$$\exp(\phi(a))\,\phi(b)\,\exp(-\phi(a)) = \underbrace{\sum_{0 \leq i,j \leq p} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\,\phi(a)^i\,\phi(b)\,\phi(-a)^j}_{\Sigma_1}$$

3.2) Si $q \in \mathbb{N}$ tq $ad(\phi(a))^n = 0$ pr $\forall n > q$.

On a :

$$\exp\left(ad(\phi(a))\right)(\phi(b)) = \sum_{0 \leq k \leq q} \frac{1}{k!} \, ad(\phi(a))^k(\phi(b)).$$

D'autre part : $ad(\phi(a)) = L_{\phi(a)} + R_{\phi(-a)}$
où, pour $f \in g\ell(V)$, on note :

$$L_f : \begin{array}{ccc} g\ell(V) & \longrightarrow & g\ell(V) \\ h & \longmapsto & f \circ h \end{array}$$

$$R_f : \begin{array}{ccc} g\ell(V) & \longrightarrow & g\ell(V) \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

Comme il est évident que $L_{\phi(a)}$ et $R_{\phi(-a)}$ sont des endo. qui commutent, la formule du binôme donne :

$$ad(\phi(a))^k = \sum_{\substack{t,s \in \mathbb{N} \\ t+s = k}} \frac{k!}{t!\,s!} \, L_{\phi(a)}^s \, R_{\phi(-a)}^t .$$

Donc :

$$\exp\left(ad(\phi(a))\right)(\phi(b)) = \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq q} \sum_{\substack{t,s \in \mathbb{N} \\ t+s = k}} \frac{1}{t!\,s!} \, \phi(a)^s \phi(b) \phi(-a)^t}_{\Sigma_2}$$

3.3) On peut bien sûr choisir q tq $q \geq 2p$. Il est clair alors que tous les termes $\frac{1}{i!j!}\phi(a)^i\phi(b)\phi(-a)^j$ de la somme Σ_1 apparaissent ds la somme Σ_2 et que les termes qui sont ds la somme Σ_2 mais pas ds la somme Σ_1 sont nuls. On a bien montré le résultat annoncé.

<u>Conclusion.</u> On a montré l'identité suivante :

$$\boxed{\exp\big(ad(\phi(a))\big)\big(\phi(b)\big) = \exp\big(\phi(a)\big)\phi(b)\exp\big(-\phi(a)\big).}$$

4) Le résultat ci-dessus, joint avec celui du 1) donne :

$$\boxed{\phi\Big(\exp\big(ad(a)\big)(b)\Big) = \exp\big(\phi(a)\big)\phi(b)\exp\big(-\phi(a)\big)}$$