Institut Galilée **2010-2011**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale I

Feuille de TD 3 : Distributions - Opérations et convolution

Exercice 1

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$.

1. a. Montrer que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

c. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right) = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^m}{m!}H(x)$.

Exercice 2

1. Montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$.

a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe une constante C_φ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de φ, $C_\varphi = < T, \phi >$.

b. Montrer que si, φ et $\tilde{\varphi}$ sont deux fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(0) \neq 0$ et $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$, alors $C_\varphi = C_{\tilde{\varphi}}$.

c. En déduire toutes les solutions de l'équation $xT = 0$.

3. Résoudre l'équation $xT = 1$.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\sin x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_{n\pi}.$$

Exercice 3

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.

2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 4

On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0. *Indication : on pourra se servir de l'identité* $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 6

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta_a' \otimes \delta_b'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.

4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T\star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^kT)\star(X^{n-k}S).$$

Exercice 8

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \mathrm{supp}\, T \subset [0, +\infty[\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, $\chi = 1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\chi = 0$ sur $]-\infty, -1[$.

1.a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$\varphi^\Delta : (x, y) \mapsto \chi(x)\chi(y)\varphi(x+y),$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On définit

$$< T\star S, \varphi > = < T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta > .$$

Montrer que $T \star S$ est bien définie et est indépendante du choix de χ.

c. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.

a. Montrer que δ_0' est inversible et calculer son inverse.

b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.