Partiel de Mathématiques

durée de l'épreuve : 2 heures

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Questions de cours

1. Donner un exemple d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas libre, et un exemple d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas génératrice.
2. Montrer que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.
3. Donner la définition d'un vecteur propre d'une application linéaire $f : V \longrightarrow V$.
4. Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice $\pi.I_n \in M_n(\mathbb{R})$?

Exercice I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer par une primitive par parties la primitive suivante
$$\int x(1+x)^n dx$$
2. À l'aide du changement de variable $t = ln(x^2)$, calculer l'intégrale
$$\int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{xln(x^2)} dx$$

Exercice II

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(x, y, z, t) = (y - 2z + t, 3x + 2y - z - t, x + 2y + z - t)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. En déduire des bases pour l'image et du noyau de f.
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

Exercice III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Avec la méthode de Gauss, calculer l'inverse de A.

Exercice IV

On considère dans tout cet exercice la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M et en déduire ses deux valeurs propres.
2. Donner des bases des espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner des matrices P et D avec P inversible et D diagonale tel que $M = PDP^{-1}$ (pas besoin de calculer P^{-1}).