Correction de la PC2

Exercice 1. Remarquons tout d'abord que comme les variables aléatoires X_t, Y_t et Z_t s'écrivent comme image par une fonction continue de la variable aléatoire (t, N_t), qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, elle sont elles-mêmes $\mathcal{F}_t$-mesurable. Les processus X, Y et Z sont donc adaptés pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. De plus, les variables aléatoires X_t, Y_t et Z_t sont clairement intégrables.

Nous utiliserons également les résultats suivants, faciles à montrer et vus en MA 101 : si U suit une loi de Poisson de paramètre θ, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(U = n) = \dfrac{\theta^n}{n!}\mathrm{e}^{-\theta}$, alors,

- $\mathbb{E}[U] = \theta$;
- $\mathrm{Var}(U) = \theta$;
- pour $u \in [0, 1]$, $\mathbb{E}[u^U] = \mathrm{e}^{-\theta(1-u)}$.

Nous rappellons enfin qu'à t fixé, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - N_s] = \mathbb{E}[N_{t-s}] = \lambda(t - s),$$

donc

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_s] - \lambda t = \lambda(t - s) + N_s - \lambda t = X_s,$$

ce qui prouve que $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

2. Pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = \lambda(t - s),$$

en utilisant que $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$, et que $X_t - X_s$ est centrée de variance $\lambda(t - s)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t^2 - 2X_s(X_t - X_s) - X_s^2|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - 2X_s\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] - X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - 2X_s\mathbb{E}[X_t - X_s] - X_s^2 \\
&= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - X_s^2
\end{aligned}$$

en utilisant que $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$, et que $X_t - X_s$ est centrée.

Donc $\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] = X_s^2 - \lambda s = Y_s$, ce qui prouve que $(Y_t, t \geq 0)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

3. Pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[u^{N_t}|\mathcal{F}_s] = u^{N_s}\mathbb{E}[u^{N_t - N_s}|\mathcal{F}_s] = u^{N_s}\mathbb{E}[u^{N_{t-s}}] = u^{N_s}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)(1-u)}.$$

On conclut alors que $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = Z_s$, et donc que $(Z_t, t \geq 0)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

Exercice 2.

1. $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un PAIS, comme somme de PAIS indépendants. C'est en outre un processus de comptage, car p.s. $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ n'ont aucun saut commun. Donc c'est un processus de Poisson. Pour trouver l'intensité, il suffit de trouver la loi du premier temps de saut, qui est l'infimum de deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2, donc une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$. $N^{(1)}+N^{(2)}$ est donc un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. C'est clairement un processus de comptage, et un PAIS. Son intensité est le paramètre de la variable aléatoire exponentielle

$$\inf\{t \geq 0, N_t^\alpha = 1\} = \inf\{t \geq 0, N_{\alpha t} = 1\} = \frac{1}{\alpha}\inf\{u \geq 0, N_u = 1\},$$

qui est une variable aléatoire de paramète $\alpha\lambda$.

Exercice 3.

1. La probabilité demandée est $\mathbb{P}[Y_t \geq u; X_t \geq s; N_t = n]$ pour $u \in [0,t]$, $s \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$: on remarque que
$$\mathbb{P}[Y_t \geq u; X_t \geq s; N_t = n] = \mathbb{P}[N_{t+s} - N_t = 0; N_t - N_{t-u} = 0; N_{t-u} = n].$$
Or le processus $(N_t, t \geq 0)$ est à accroissements indépendants stationnaires donc
$$\mathbb{P}[N_{t+u} - N_t = 0; N_t - N_{t-s} = 0; N_{t-s} = n] = \mathbb{P}[N_s = 0]\mathbb{P}[N_u = 0]\mathbb{P}[N_{t-u} = n].$$
On rappelle que N_s suit une loi de Poisson de paramètre λs. Ainsi,
$$\mathbb{P}[Y_t \geq u; X_t \geq s; N_t = n] = e^{-\lambda(s+u)}e^{-\lambda(t-u)}\frac{(\lambda(t-u))^n}{n!}.$$
En effectuant la somme de ces probabilités pour $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que
$$\mathbb{P}[Y_t \geq u; X_t \geq s] = e^{-\lambda(s+u)}.$$
Ainsi, X_t et Y_t sont indépendantes, X_t suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y_t suit une loi telle que $\mathbb{P}[Y_t \geq u] = e^{-\lambda u}$ pour tout $u \in [0,t]$ et $\mathbb{P}[Y_t \geq u] = 0$ si $u > t$.
2. En particulier, $\mathbb{E}[X_t] = 1/\lambda$ et $\mathbb{E}[Y_t] = \int_0^t \mathbb{P}[Y_t \geq u]du = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$. Le temps de passage entre deux bus suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le temps moyen de passage est donc de $1/\lambda < \mathbb{E}(X_t + Y_t) = (2 - e^{-\lambda t})/\lambda$.

Exercice 4. $(S_t, t \geq 0)$ est le processus de Poisson composé de loi de saut la loi de Y_1 et d'intensité λ.

1. Remarquons que $\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$. Par conséquent,
$$S_t = \sum_{n \geq 1} Y_n \mathbf{1}_{\{N_t \geq n\}} = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N_t}.$$
Notons φ_{S_t} et φ_{Y_1} les fonctions caractéristiques respectives de S_t et Y_1. En particulier, pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[e^{iuS_t}] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}[e^{iuS_t}|N_t = n]\mathbb{P}[N_t = n] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}[e^{iu(Y_1+\cdots+Y_n)}]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$
Comme les variables $Y_1, \cdots, Y_n$ sont i.i.d., on obtient
$$\varphi_{S_t}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}[\varphi_{Y_1}(u)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t(1-\varphi_{Y_1}(u))}.$$
2. Lorsque Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $\varphi_{Y_1}(u) = 1 - p + pe^{iu}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, le calcul précédent nous donne $\varphi_{S_t}(u) = e^{-\lambda tp(1-e^{iu})}$, c'est-à-dire que S_t suit une loi de Poisson de paramètre λpt.
Plus généralement, notons $(U_n, n \geq 1)$ la suite de variables exponentielles indépendantes de paramètre λ telle que $(N_t, t \geq 0)$ soit le processus de comptage associé à cette suite. On pose $G_0 = 0$, $G_1, G_2, \cdots$ les numéros successifs des Y_i égaux à 1 et $V_n = U_{G_{n-1}+1} + \cdots + U_{G_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que la suite $(V_n, n \geq 1)$ est constituée de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λp et

que $(S_t, t \geq 0)$ est le processus de comptage associé à cette suite. Par conséquent, $(S_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre λp. De même, en remplaçant dans ce qui précède Y_i par $(1-Y_i)$, on montre que $(N_t - S_t, t \geq 0)$ est le processus de comptage associé aux $W_n = U_{H_{n-1}+1} + \cdots + U_{H_n}$ où $H_0 = 0$ et $H_1, H_2, \cdots$ sont les numéros successifs des Y_i égaux à 0. Ainsi, $(N_t - S_t, t \geq 0)$ est aussi un processus de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. On montre enfin que les suites $(V_n, n \geq 1)$ et $(W_n, n \geq 1)$ sont indépendantes donc les deux processus de comptage $(S_t, t \geq 0)$ et $(N_t - S_t, t \geq 0)$ sont indépendants.

Autre méthode : $(S_t, t \geq 0)$ est clairement un processus de comptage (croissant, à valeur entières et avec des sauts de 1 uniquement) et c'est un PAIS : en effet, si $t_1 < t_2$, $S_{t_2} - S_{t_1} = \displaystyle\sum_{N_{t_1} < i \leq N_{t_2}} Y_i$ est indépendant de la tribu engendrée par les $S_t, 0 \leq t \leq t_1$ (incluse dans $\sigma(N_s, Y_i, 0 \leq s \leq t_1, 1 \leq i \leq N_{t_1})$). Par conséquent, $(S_t, t \geq 0)$ est une processus de Poisson et puisque S_t suit une loi de Poisson de paramètre λpt, on en déduit que l'intensité du processus est λp. On procède de même pour $(N_t - S_t, t \geq 0)$.

Exercice 5.

1. Soit $n, m \geq 0$. On écrit $S_{n+m} = S_n + R_{m,n}$ avec $R_{m,n} = S_{n+m} - S_n = X_{n+1} + \ldots + X_{n+m}$ si $m \geq 1$ et $R_{0,n} = 0$ p.s., indépendante de $(X_1, \ldots, X_n)$ donc de S_n. De plus le vecteur $(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})$ a même loi que $(X_0, \ldots, X_m)$ donc $R_{m,n}$ a même loi que S_m.
2. Si $0 \leq n \leq n'$, $S_{n'} - S_n = R_{n'-n,n}$ indépendante de $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, 0 \leq k \leq n)$. On en déduit que les accroissements de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants. De plus $S_{n'} - S_n$ a même loi que $S_{n'-n} - S_0 = S_{n'-n}$ donc les accroissements de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires. Sa moyenne est donnée par, $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1) = nm$ pour $n \geq 0$,, puisque $S_0 = 0$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ ont même loi. De plus, si $0 \leq n \leq n'$, $\mathrm{Cov}(S_n, S_{n'}) = \mathrm{Cov}(S_n, S_{n'} - S_n + S_n) = \mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$, puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ iid. On en déduit la fonction de covariance de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\mathrm{Cov}(S_n, S_m) = \min(n, m)\sigma^2$.
3. $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables. Par la loi forte des grands nombres $\dfrac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1) = m$ p.s.
4. $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de carré intégrables. Par le théorème central limite $\sqrt{n}\left(\dfrac{S_n}{n} - m\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ en loi.
5. Soit $0 < t_1 < t_2 < t_N$, puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus à accroissements indépendants,
$$(B^{(n)}_{t_1}, B^{(n)}_{t_2} - B^{(n)}_{t_1}, \ldots, B^{(n)}_{t_N} - B^{(n)}_{t_{N-1}})$$
est un vecteur de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Il suffit donc d'étudier la convergence en loi de chacune des variables. On pose $t_0 = 0$. Pour $0 \leq k \leq N-1$, si n est suffisamment grand $\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor > 0$ et
$$B^{(n)}_{t_{k+1}} - B^{(n)}_{t_k} = \sqrt{\frac{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor}{n}} \frac{S_{\lfloor nt_{k+1} \rfloor} - S_{\lfloor nt_{k+1} \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor}} \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{\frac{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor}{n}} \frac{S_{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_{k+1} \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor}}.$$
Or d'après 4., puisque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, $\dfrac{S_{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_{k+1} \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt_{k+1} \rfloor - \lfloor nt_k \rfloor}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, 1)$ en loi. On en déduit que
$$B^{(n)}_{t_{k+1}} - B^{(n)}_{t_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_k) \text{ en loi.}$$
Le vecteur $(B^{(n)}_{t_1}, B^{(n)}_{t_2} - B^{(n)}_{t_1}, \ldots, B^{(n)}_{t_N} - B^{(n)}_{t_{N-1}})$ converge donc en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Delta = \mathrm{diag}(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_{N-1})$. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Par définition $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \Delta)$. On peut donc écrire que
$$(B^{(n)}_{t_1}, B^{(n)}_{t_2} - B^{(n)}_{t_1}, \ldots, B^{(n)}_{t_N} - B^{(n)}_{t_{N-1}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \text{ en loi.}$$
On en déduit que
$$(B^{(n)}_{t_1}, B^{(n)}_{t_2}, \ldots, B^{(n)}_{t_N}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_N}) \text{ en loi.}$$