Correction de la PC3 : Mouvement brownien

Exercice 1. cf. poly de cours.
Exercice 2.

1. Le processus $X = \lambda_1 B^1 + \cdots + \lambda_n B^n$ est un processus continu. On vérifie facilement que $X_0 = 0$ et X est un processus gaussien centré tel que si $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_s, X_t) &= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i B_s^i, \sum_{i=1}^n \lambda_i B_t^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \,\mathrm{cov}\left(B_s^i, B_t^i\right) \text{ car les } B^i \text{ sont indépendants entre eux} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 s \wedge t = s \wedge t\end{aligned}$$

On en déduit que $(X_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

2. Pour tout $t \geq 0$, $M_t = \sum_{k=1}^n ({B_t^{(k)}}^2 - t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable comme somme de variables $\mathcal{F}_t$-mesurables (voir exercice précédent, première question). De plus, si $0 \leq s \leq t$, par linéarité de l'espérance conditionnelle et puisque chaque processus $({B_t^{(k)}}^2 - t, t \geq 0)$, $1 \leq k \leq n$, est une $\mathcal{F}_t$-martingale,

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[{B_t^{(k)}}^2 - t|\mathcal{F}_s] = \sum_{k=1}^n ({B_s^{(k)}}^2 - s) = M_s \quad \text{p.s..}$$

Ainsi, $(M_t, t \geq 0)$ est bien une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Exercice 3. $(B'_v, v \geq 0)$ étant un mouvement brownien standard, c'est une martingale par rapport à sa filtration canonique $(\mathcal{F}'_v, v \geq 0)$. D'où $\mathbb{E}\left[B'_{1/s}|\mathcal{F}'_{1/t}\right] = B'_{1/t}$ dès que $1/t \leq 1/s$. D'autre part, $\sigma(B_t) = \sigma\left(B'_{1/t}\right) \subset \mathcal{F}'_{1/t}$. D'où

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{s}B_s|B_t\right] = \mathbb{E}\left[B'_{1/s}|\sigma\left(B'_{1/t}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[B'_{1/s}|\mathcal{F}'_{1/t}\right]|\sigma(B'_{1/t})\right] = \mathbb{E}\left[B'_{1/t}|\sigma(B'_{1/t})\right] = B'_{1/t} = \frac{1}{t}B_t$$

Exercice 4. On utilise la propriété d'inversion du temps du mouvement brownien : en notant, $B'_t = tB_{1/t}$ pour tout $t > 0$ et $B'_0 = 0$ p.s., le processus $(B'_t)_{t\geq 0}$ a la loi d'un mouvement brownien issu de 0. En particulier, ses trajectoires sont presque sûrement continues en 0 : $\lim_{t\to 0^+} B'_t = \lim_{t\to 0^+} tB_{1/t} = 0$ p.s. Par conséquent, $\lim_{s\to+\infty} \frac{B_s}{s} = 0$ p.s.

Exercice 5. 1. (a) Soit $s \geq 0$. Comme B_s suit une loi $N(0, s)$, on a $B_s \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{s}B_1$. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}(|B_s|) = \sqrt{s}\mathbb{E}(|B_1|).$$

(b) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{|B_s|}{s}ds\right] = \int_0^1 \frac{\mathbb{E}(|B_s|)}{s}ds = \mathbb{E}(|B_1|)\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} < +\infty.$$

En particulier, la variable $\int_0^1 \frac{|B_s|}{s}ds$ est presque-sûrement finie, donc $\int_0^1 \frac{B_s}{s}ds$ est presque-sûrement absolument convergente donc convergente.

(c) Considérons deux événements de probabilité 1 : $\Omega_1 = \{t \longmapsto B_t \text{ continue}\}$ et $\Omega_2 = \{\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds \text{ est convergente}\}$. Alors sur l'événement $\Omega_1 \cap \Omega_2$ qui est aussi de probabilité 1, on a pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t \frac{B_s}{s} ds = \int_0^1 \frac{B_s}{s} ds + \int_1^t \frac{B_s}{s} ds.$$

La première intégrale est convergente et la seconde l'est aussi comme intégrale d'une fonction continue sur $[1, t]$. Ainsi, p.s., le processus $\left(\int_0^t \frac{B_s}{s} ds; t \geq 0 \right)$ est bien défini.

2.(a) D'après 1(c), le processus $(Z_t; t \geq 0)$ est bien défini et continu sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, donc presque-sûrement. De plus, à $t > 0$ fixé, par utilisation du résultat classique sur les sommes de Riemann, Z_t est la limite presque-sûre de la suite

$$Z_t^n = B_t - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{kt/n}}{kt}.$$

Chacune des variables Z_t^n, $n \in \mathbb{N}^*$, est $\mathcal{F}_t$-mesurable comme combinaison linéaire de variables $B_{kt/n}$. Par passage à la limite presque-sûre, Z_t est aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable.

(b) Montrons que $(Z_t; t \geq 0)$ est un processus gaussien. On fixe $t_1, \cdots, t_k > 0$ ainsi que des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. Il suffit de montrer que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_{t_j}$ suit une loi gaussienne. On utilise à nouveau les sommes de Riemann pour écrire que p.s. (et donc en loi)

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_{t_j} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_{t_j}^n.$$

Remarquons qu'à n fixé, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_{t_j}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de B_s donc suit une loi gaussienne puisque $(B_s; s \geq 0)$ est en particulier un processus gaussien. Par conséquent, par passage à la limite en loi, on obtient que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z_{t_j}$ suit aussi une loi gaussienne.

En conclusion, $(Z_t; t \geq 0)$ est un processus gaussien.

(c) Pour $t \geq 0$, on a en appliquant le théorème de Fubini

$$\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(B_t) - \int_0^1 \frac{\mathbb{E}(B_s)}{s} ds = 0.$$

Soient $0 \leq s \leq t$. On peut vérifier par Fubini-Tonelli que $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{|B_u||B_v|}{uv} du dv \right] < +\infty$. Donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour calculer $\mathbb{E}(Z_s Z_t)$. On obtient (en utilisant à plusieurs reprises que $\mathbb{E}(B_u B_v) = u \wedge v$ pour tous $u, v \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_s Z_t) &= \mathbb{E}\left\{ \left(B_s - \int_0^s \frac{B_u}{u} du \right) \left(B_t - \int_0^t \frac{B_v}{v} dv \right) \right\} \\
&= \mathbb{E}(B_s B_t) - \int_0^s \frac{\mathbb{E}(B_u B_t)}{u} du - \int_0^t \frac{\mathbb{E}(B_v B_s)}{v} dv + \int_{u=0}^{s} \int_{v=0}^{t} \frac{\mathbb{E}(B_u B_v)}{uv} dv du \\
&= s - 2 \int_0^s du - \int_s^t \frac{s}{v} dv + \int_{u=0}^{s} \int_{v=0}^{u} \frac{1}{u} dv du + \int_{u=0}^{s} \int_{v=u}^{t} \frac{1}{v} dv du \\
&= s - 2s - s \ln(t/s) + s + s \ln(t) - s \ln(s) + s \\
&= s.
\end{aligned}$$

(d) En conclusion, $(Z_t; t \geq 0)$ est un processus continu p.s., gaussien centré et de même covariance que $(B_t; t \geq 0)$. C'est donc un mouvement brownien issu de zéro.

Exercice 6.

1. Soit $\omega \in \Omega$ vérifiant $T_a(\omega) < +\infty$ et telle que la trajectoire $(B_t(\omega), t \geq 0)$ soit continue. L'ensemble $\{t \geq 0; B_t(\omega) = a\}$ est un fermé non vide minoré. Il contient donc sa borne inférieure $T_a(\omega)$. On en déduit $B_{T_a(\omega)}(\omega) = a$.

2. Si $T_a(\omega) \leq t$, alors $B_{T_a(\omega)}(\omega) = a$, d'après la question précédente. Comme la trajectoire est continue, cela implique que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall u \in [T_a(\omega) - \eta, T_a(\omega)], \quad B_u(\omega) > a - \frac{1}{p}$$

En particulier il existe $q \in \mathbb{Q} \cap [0, T_a(\omega)] \subset \mathbb{Q} \cap [0, t]$ tel que $B_q(\omega) > a - \frac{1}{p}$. On a ainsi montré

$$\omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{B_q > a - \frac{1}{p}\right\}$$

Réciproquement, on suppose $\omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{B_q > a - \frac{1}{p}\right\}$. Soit alors $q_p \in \mathbb{Q} \cap [0, t]$ tel que $B_{q_p}(\omega) > a - \frac{1}{p}$. Soit $(q_{p_n}, n \geq 0)$ une sous-suite convergente, vers une limite notée $r \in [0, t]$. Alors, la trajectoire étant continue en r, on a $B_r(\omega) \geq a$, d'où $T_a(\omega) \leq r \leq t$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des trajectoires continues. On a établit l'égalité

$$\mathcal{C} \cap \{\omega \in \Omega; T_a(\omega) \leq t\} = \mathcal{C} \cap \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{\omega \in \Omega; B_q(\omega) > a - \frac{1}{p}\right\}$$

Comme $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$, ceci montre que la différence entre les deux ensembles $\{T_a \leq t\}$ et $\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{B_q > a - \frac{1}{p}\right\}$ est $\mathbb{P}$-négligeable. Or le second, comme intersection et réunion dénombrables d'ensembles $\mathcal{F}_t$-mesurables, est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Comme $\mathcal{F}_t$ est par hypothèse complétée des ensembles négligeables, on en déduit que $\{T_a \leq t\}$ est aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable. On a bien ainsi montré que T_a est un temps d'arrêt.

3. Notons $(B_t^{(a)}, t \geq 0)$ le mouvement brownien défini par $B_t^{(a)} = aB_{t/a^2}$, et $T_a^{(a)} = \inf\{t > 0; B_t^{(a)}(\omega) = a\}$. Alors on a l'égalité en loi $T_a^{(a)} = T_a$. De plus,

$$\begin{aligned} T_a^{(a)} &= \inf\{t > 0; B_t^{(a)}(\omega) = a\} \\ &= \inf\{t > 0; aB_{t/a^2}(\omega) = a\} \\ &= a^2 \inf\{t > 0; B_t(\omega) = 1\} = a^2 T_1 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité en loi $T_a = a^2 T_1$.

4. Soit $\lambda > 0$. En se limitant aux trajectoires continues, on vérifie facilement que $B_{T_a \wedge n}$ appartient à $]-\infty, a]$ $\mathbb{P}$-p.s. On définit la $(\mathcal{F}_t, \geq 0)$-martingale exponentielle $(M_t, t \geq 0)$ par $M_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2})$. D'après le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}[M_{T_a \wedge n}] = \mathbb{E}[M_{T_a \wedge 0}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$. D'où

$$1 = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_{T_a \wedge n} - \frac{\lambda^2}{2} T_a \wedge n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a \leq n}\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_{T_a \wedge n} - \frac{\lambda^2}{2} T_a \wedge n\right) 1_{T_a > n}\right]$$

Par convergence monotone, $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a \leq n}\right]$ tend vers $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a < +\infty}\right]$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part,

$$\exp\left(\lambda B_{T_a \wedge n} - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a > n} \leq \exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} n\right) \text{ car } B_{T_a \wedge n} \leq a \text{ et } \lambda \geq 0$$

On en déduit que $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_{T_a \wedge n} - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a > n}\right]$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'où finalement

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[M_{T_a \wedge n}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a\right) 1_{T_a < +\infty}\right]$$

On fait alors tendre λ vers 0, et par convergence dominée, il en ressort que $1 = \mathbb{E}[1_{T_a < +\infty}] = \mathbb{P}(T_a < +\infty)$. Le temps d'arrêt T_a est donc fini p.s.

5. Des égalités qui précèdent, il résulte

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_a\right)\right] = \exp(-\lambda a)$$

Cette transformée de Laplace est caractéristique de la loi de T_a ; on peut reconnaître une gaussienne inverse. De plus, on déduit de l'égalité des transformées de Laplace

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_a\right)\right] = \exp(-\lambda a) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2 a^2}{2}T_1\right)\right]$$

l'égalité en loi des variables T_a et $a^2 T_1$.

6. Comme B_{T_a} est égal à a sur l'ensemble $\{T_a \le t\} \subset \{T_a < +\infty\}$, on a

$$\mathbb{P}(T_a \le t, B_t < a) = \mathbb{P}(T_a \le t, B_t - B_{T_a} < 0)$$

On pose $\tilde{B}_s = B_{T_a+s} - B_{T_a}$ sur $\{T_a < +\infty\}$, $\tilde{B}_s = 0$ sinon. Alors $(\tilde{B}_s, s \ge 0)$ est un mouvement brownien, indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$, d'après la propriété de Markov forte. Avec ces notations, on a

$$\mathbb{P}(T_a \le t, B_t - B_{T_a} < 0) = \mathbb{P}(T_a \le t, \tilde{B}_{t-T_a} < 0) = \mathbb{E}[1_{T_a \le t} 1_{\tilde{B}_{t-T_a} < 0}]$$

Comme T_a est $\mathcal{F}_{T_a}$-mesurable, on en déduit que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E}[1_{T_a \le t} 1_{\tilde{B}_{t-T_a} < 0} | \mathcal{F}_{T_a}](\omega) = 1_{T_a \le t}(\omega)\mathbb{E}[1_{\tilde{B}_{t-T_a(\omega)} < 0} | \mathcal{F}_{T_a}](\omega).$$

Or, à ω fixé, $\tilde{B}_{t-T_a(\omega)}$ est une gaussienne centrée de variance $t - T_a(\omega)$ indépendante de $\mathcal{F}_{T_a}$. Il s'ensuit que $\mathbb{E}[1_{\tilde{B}_{t-T_a(\omega)}<0}|\mathcal{F}_{T_a}] = \mathbb{E}[1_{\tilde{B}_{t-T_a(\omega)}<0}] = 1/2$ si $t - T_a(\omega) > 0$, $= 0$ si $t - T_a(\omega) = 0$. D'où

$$\mathbb{E}[1_{T_a \le t} 1_{\tilde{B}_{t-T_a} < 0}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[1_{T_a \le t} 1_{\tilde{B}_{t-T_a} < 0} | \mathcal{F}_{T_a}]\right] = \mathbb{E}\left[1_{T_a < t}\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a < t)$$

Comme $\{T_a = t\} \subset \{B_t = a\}$ car $B_{T_a} = a$, on voit facilement que $\mathbb{P}(T_a = t) = \mathbb{P}(B_t = a) = 0$. Ceci achève la démonstration de la formule

$$\mathbb{P}(T_a \le t, B_t < a) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a \le t).$$

7. On remarque que $S_t(\omega) \ge a$ implique par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un $u \in [0, t]$ tel que $B_s(u) = a$, c'est-à-dire que $T_a(\omega) \le t$. Réciproquement, si $T_a(\omega)$ est inférieur à t, alors on a $S_t(\omega) \ge S_{T_a(\omega)}(\omega) \ge B_{T_a(\omega)}(\omega) = a$. On montre ainsi que $\{T_a \le t\} = \{S_t \ge a\}$. D'où

$$\mathbb{P}(S_t \ge a, B_t < a) = \mathbb{P}(T_a \le t, B_t < a) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a \le t) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_t \ge a)$$

De plus, l'événement $\{B_t \ge a\}$ est inclus dans $\{S_t \ge a\}$. Il en résulte

$$\mathbb{P}(S_t \ge a) = \mathbb{P}(S_t \ge a, B_t \ge a) + \mathbb{P}(S_t \ge a, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t \ge a) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_t \ge a),$$

mais encore

$$\mathbb{P}(S_t \ge a) = 2\mathbb{P}(B_t \ge a) = \mathbb{P}(|B_t| \ge a)$$

A t fixé, les variables aléatoires S_t et $|B_t|$ ont même fonction de répartition et donc même loi. Les deux processus $|B|$ et S ne peuvent en revanche avoir même loi puisque l'un est croissant et l'autre non.

8. Comme $B_t = \sqrt{t}B_1$ en loi, on en déduit

$$\mathbb{P}(T_a \le t) = \mathbb{P}(|B_t| \ge a) = \mathbb{P}(\sqrt{t}|B_1| \ge a) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \le t\right)$$

T_a est donc égal en loi à a^2/B_1^2.

9. Soit $\omega \in \Omega$. Si g_1 est inférieur à u, cela implique que la trajectoire $(B_t(\omega, t \geq 0)$ ne s'annule pas sur $]u, 1]$ et donc que $d_u(\omega)$ est supérieur à 1. Et inversement. On a donc bien $\{g_1 \leq u\} = \{d_u \geq 1\}$.
D'autre part, il est facile de vérifier que $d_u - u$ est égal au premier temps d'atteinte de $-B_u$ par le mouvement brownien $(\hat{B}_s = B_{u+s} - B_u, s \geq 0)$, qui est indépendant de $\mathcal{F}_u$. On en déduit, avec les notations naturelles,
$$\mathbb{E}\left[1_{\hat{T}_{-B_u} \leq x} | \mathcal{F}_u\right](\omega) = \mathbb{E}\left[1_{\hat{T}_{-B_u(\omega)} \leq x}\right] = \mathbb{E}\left[1_{B_u(\omega)^2 \hat{T}_1 \leq x}\right]$$
puis
$$\mathbb{P}\left(d_u - u \leq x\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\hat{T}_{-B_u} \leq x} | \mathcal{F}_u\right]\right] = \mathbb{P}\left(B_u^2 \hat{T}_1 \leq x\right)$$
Cela montre que d_u est égal en loi à $u + B_u^2 \hat{T}_1$.
On en déduit
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(g_1 \leq u\right) &= \mathbb{P}\left(d_u \geq 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(B_u^2 \hat{T}_1 \geq 1 - u\right)) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{u B_1^2}{\hat{B}_1^2} \geq 1 - u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{1 + \frac{B_1^2}{\hat{B}_1^2}} \leq u\right)
\end{aligned}$$
Cela montre que g_1 est égal en loi à $\frac{1}{1 + \frac{B_1^2}{\hat{B}_1^2}}$.