Examen de Groupes et Algèbres de Lie

12 Mai 2014 - Durée: 2 heures

Documents autorisés : uniquement les notes et le polycopié du cours !

Les téléphones, calculatrices et autres appareils électroniques devront être rangés et peuvent être saisis le cas échéant.

Dans les exercices suivants, on notera comme d'habitude E_{ij} (où $i, j \in \{1, \ldots, n\}$) la matrice élémentaire de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les entrées sont nulles sauf celle à l'intersection de la ligne i et de la colone j qui vaut 1.

Exercice 1 (**Décompositions de la représentation adjointe).** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$.

i) Montrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{g}$ est simple.

ii) On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_2(\mathbb{C})$, la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures. Déontrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ n'est pas décomposable en somme directe d'irréductibles.

iii) On suppose désormais que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

  (a) Montrer que si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est décomposable en somme directe d'irréductibles.

  (b) Déterminer (on demande une démonstration) toutes les algèbres de Lie *résolubles* pour lesquelles la représentation adjointe est décomposable en irréductibles.

Exercice 2. Soient G un sous-groupe fermé et connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, H un sous-groupe fermé et connexe de G, et $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie respectives. On pose

$$N = \{g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H\} \ ; \ \mathfrak{n} = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}\} \ .$$

i) Démontrer que N est un sous-groupe fermé de G, que sa composante neutre N^0 contient H, et que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$.

ii) (a) Soient $X \in \mathfrak{n}, Y \in \mathfrak{h}$. Montrer que $(\mathrm{Ad}_{\exp_G(X)})(Y) \in \mathfrak{h}$.

  (b) Démontrer que $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de N.

iii) On suppose désormais que $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, et que $H = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$.

(a) Déterminer $\mathfrak{h}$, puis $\mathfrak{n}$. (Pour cette dernière question, on pourra calculer $[X, E_{11}]$ pour tout $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans $\mathfrak{g}$.)

(b) Déterminer N^0, et montrer que N n'est pas connexe.

iv) Soit h un élément de H de valeurs propres *distinctes* (x, y).

(a) Déterminer l'ensemble $D_h = \{ghg^{-1}, g \in N\}$ des conjugués de g sous N.

(b) Déterminer le centralisateur $C_G(h) = \{g \in G, ghg^{-1} = h\}$.

(c) Déterminer N, et calculer le nombre de ses composantes connexes.

Exercice 3 (simplicité de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$). Soit $n \geqslant 3$. L'objectif de cet exercice est d'établir que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est simple. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal non-nul de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

i) Montrer que les $E_{i,j}$ $(i \neq j)$ engendrent $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre de Lie. En déduire que si $\mathfrak{J}$ contient un $E_{i,j}$, alors $\mathfrak{J} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

ii) Soit $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,i}$ une matrice diagonale de $\mathfrak{J}$. On suppose que D n'est pas scalaire : $\exists i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$. Montrer que $E_{i,j} \in \mathfrak{J}$ et conclure.

iii) Soit maintenant $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,i}$ une matrice diagonale de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ telle que $(i, j) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$ soit injective sur l'ensemble des couples $i \neq j$.

(a) Montrer que l'application adjointe $\mathrm{ad}_D : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ se restreint à $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que l'un des vecteurs propres de ad_D est dans $\mathfrak{J}$, et *conclure*.

iv) En déduire les idéaux de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.