Examen de Groupes et Algèbres de Lie - 2ème session

5 juin 2014 - Durée: 2 heures

Documents autorisés : uniquement les notes et le polycopié du cours !

Les téléphones, calculatrices et autres appareils électroniques devront être rangés et peuvent être saisis le cas échéant.

Exercice 1 (Le groupe des isométries affines). On note $\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = \|x\|\}$ le groupe des isométries *affines* de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On rappelle que tout isométrie affine $f \in \mathrm{E}(n)$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = u(x) + y$ où $y \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

i) Démontrer que les translations[1] forment un sous-groupe normal $\mathrm{T}(n)$ de $\mathrm{E}(n)$ et que le groupe topologique quotient $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n)$ est isomorphe en tant que groupe topologique à $\mathrm{O}(n)$.

ii) Combien $\mathrm{E}(n)$ a-t-il de composantes connexes ?

iii) Démontrer que $\mathrm{E}(n)$ est isomorphe (en tant que groupe topologique) à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$; en particulier c'est un groupe de Lie linéaire.

iv) Démontrer que l'algèbre de Lie de $\mathrm{E}(n)$ est isomorphe à

$$\mathfrak{e}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{R}) / \, X \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}), Y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

en tant que *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Sur les algèbres de Lie réductives). Dans cet exercice, une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sera dite *réductive si tout idéal abélien est inclus dans le centre* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap D(\mathfrak{g}) = \{0\}$, où $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$. (On remarquera que cette définition n'est pas exactement celle donnée en cours !)

i) Démontrer que si $\mathfrak{g}$ est réductive, il existe $\mathfrak{h}$ un idéal semi-simple tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$.

ii) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{h}$ un idéal semi-simple.

 (a) Démontrer que $\mathfrak{g}$ est réductive.

 (b) Démontrer que $\mathfrak{h} = D(\mathfrak{g})$.

iii) On note $rad(\mathfrak{g})$ le radical de $\mathfrak{g}$, c'est à dire le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

1. rappelons qu'une translation est une application de la forme $\tau_y := x \mapsto x + y$ où $y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Démontrer que si $\mathfrak{g}$ est réductive alors $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

(b) En déduire que $\mathfrak{g}$ est réductive si et seulement si $rad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (on notera que cette dernière caractérisation des algèbres de Lie réductives est celle donnée en cours et dans le polycopié).

iv) Démontrer qu'une algèbre de Lie réductive est *résoluble* si et seulement si elle est abélienne.

v) Démontrer que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est réductive mais n'est pas semi-simple (indication : on pourra utiliser que $D(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 3 (Centralisateurs dans $\mathrm{SU}(n)$). On note $\mathrm{AH}_n = \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), {}^t\overline{M} = -M\}$ les matrices anti-hermitiennes.

i) Déontrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ du sous-groupe $\mathrm{U}(n)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est égale à AH_n.

ii) Déterminer sa sous-algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n) := \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(n))$.

iii) Soit $X \in \mathfrak{u}(n)$. Démontrer que $U_X := \{u \in \mathrm{U}(n) / \, uXu^{-1} = X\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{U}(n)$. Quelle est son algèbre de Lie ?

iv) Soit $i\lambda_1, \dots, i\lambda_k$ les valeurs propres distinctes de X de multiplicités respectives $p_1, \dots, p_k$.

(a) On suppose que X est diagonale, de la forme $\mathrm{diag}(i\lambda_1, \dots, i\lambda_k)$ (avec les valeurs propres ordonnées comme ci-dessus). Montrer que

$$\mathrm{Lie}(U_X) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} / \, A_i \in \mathrm{AH}_{p_i} \right\}$$

puis que U_X est égal à $\mathrm{U}(p_1) \times \dots \times \mathrm{U}(p_k)$.

(b) En déduire que U_X est toujours conjugué à $U(p_1) \times \dots \times \mathrm{U}(p_k)$.