MACS1 2010-2011 **Analyse numérique**

FEUILLE D'EXERCICES N°7

Interpolation polynomiale

Exercice 1.

Considérons une fonction f dont le graphe passe par les points $M_0 = (0,0)$, $M_1 = (1,2)$, $M_2 = (2,16)$, et $M_3 = (3,36)$.

1) Déterminer le polynôme de Lagrange p_2 coïncidant avec f aux points M_0, M_1, et M_2.

2) Déterminer la forme du polynôme d'interpolation de Newton coïncidant avec f aux points M_0, M_1, et M_2.

3) En se servant des calculs de question précédente, déterminer le polynôme d'interpolation p_3 coïncidant avec f aux points M_0, M_1, M_2, et M_3.

4) En supposant que la fonction f est assez régulière, donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E_2 = f - p_2$ et de l'erreur $E_3 = f - p_3$.

5) Donner une estimation de la valeur de $f(1.5)$ par p_2 et p_3.

Exercice 2 : Interpolation de Hermite.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et x_1 et x_2 deux points distincts. Soit p un polynôme de degré inférieur ou égal à trois, vérifiant $p(x_i) = f(x_i)$ et $p'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 1, 2$.

1) Montrer qu'un tel polynôme existe et qu'il est unique.

2) Établir la majoration d'interpolation suivante : si $f \in \mathcal{C}^4([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)^2}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

3) Trouver une base $(H_1, H_2, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ de $\mathcal{P}_3$ telle que :

$$p(x) = f(x_1)H_1(x) + f(x_2)H_2(x) + f'(x_1)\tilde{H}_1(x) + f'(x_2)\tilde{H}_2(x), \quad \forall p \in \mathcal{P}_3,$$

et exprimer cette base en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange L_1 et L_2.

4) Décrire les polynômes d'interpolation de Hermite dans le cadre général.

Exercice 3 : Convergence de l'interpolation de Lagrange.

Soient $\alpha > 1$, f une fonction définie sur $[-1, 1]$ par :$f(x) = \dfrac{1}{x - \alpha}$ et p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux $n + 1$ points distincts $x_i = -1 + hi$ avec $i \in [\![0, n]\!]$ et $h = \dfrac{2}{n}$.

1) Montrer que si $\alpha > 3$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - p_n||_\infty = 0$.

2) En pratique, nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, avec $i \in 0, \dots, n - 1$. Notons f_n la fonction continue telle que ${f_n}_{|_{[x_i,x_{i+1}]}}$ est un polynôme de degré un et $f_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

a) Soit $i \in [\![0, n - 1]\!]$. Écrire l'approximation de Lagrange P_1^i de degré un de f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

b) Puis montrer que si $\alpha \notin [-1, 1]$, alors $||f - f_n||_\infty \leq \dfrac{C}{n^2}$ et donc que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 : Propriétés des polynômes de Legendre.

Les polynômes de Legendre sont définis par :

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n. \end{cases}$$

1) Montrer que P_n est un polynôme de degré n et déterminer son coefficient devant le terme x_n.

2) En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour $m \leq n$, nous avons

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} \left\{(x^2 - 1)^n\right\} (x^2 - 1)^m dx.$$

En déduire que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} I_n & \text{sinon} \end{cases},$$

où $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$.

3) Montrer que

$$I_n = -\frac{2n}{(2n+1)} I_{n-1}.$$

4) Justifier l'écriture

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i(x),$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $0 \le j \le n-1$.

5) Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$.

6) En écrivant $P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x)$, montrer par récurrence que P_n a la même parité que n et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-1}(x) \end{array} \right. .$$

Exercice 5 : Splines cubiques.

Le but de cet exercice est l'étude d'un procédé d'interpolation d'une fonction, à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$, par une fonction cubique par morceaux, appelée **spline cubique**. Soit $(x_i)_{0 \le i \le n+1}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. Nous appelons spline cubique une fonction S vérifiant les conditions suivantes :

- $S \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$,
- $S_{|[x_i,x_{i+1}]}$ est polynôme de degré trois pour tout $i = 0, \ldots, n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction de ses valeurs aux points x_i, mais aussi en fonction de ses dérivées secondes en x_i.

1) Sur un intervalle $[\alpha,\beta]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à trois défini par ses valeurs $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, et $P''(\beta)$.
Déterminer ensuite les valeurs des dérivées premières en α et β en fonction des données.

2) En déduire qu'il existe une unique spline cubique S interpolant f au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S(x_i) = f(x_i), & 0 \le i \le n+1 \\ S'(a) = f'(a), & S'(b) = f'(b). \end{array} \right.$$

3) En considérant, pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, la fonction spline S_i telle que

$$S_i(x_j) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & j \ne i \\ 1 & \text{si} & j = i \end{array} \right. ,$$

et $S_i'(a) = S_i'(b) = 0$. Puis les splines S_a et S_b telle que $S_\alpha(x_i) = 0$ pour $\alpha \in \{a, b\}$ et $S_a'(a) = S_b'(b) = 1$ et $S_b'(a) = S_a'(b) = 0$. Montrer qu'une fonction spline S, interpolant f sur $[a, b]$ s'écrit

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j S_j(x) + \sum_{\alpha \in \{a,b\}} f_\alpha' S_\alpha(x).$$