**Déformations d'algèbres de Poisson lisses**

Thierry Lambre

Université Blaise Pascal
Département de Mathématiques
63177 Aubière Cedex
courriel: thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr

Résumé: Soit $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson. La notion d'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ permet l'étude de déformations de l'algèbre de Poisson $S$. Lorsque $(S, \ .\ )$ est lisse, nous montrons que la limite semi-classique $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$ de l'algèbre de Poisson $S$ est isomorphe à l'algèbre de Poisson gr $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. Dans le cas des algèbres de Lie-Poisson $S = S(\mathfrak{g})$, nous montrons de plus que l'algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star)$, où $\mathfrak{g}^\star$ est une algèbre de Lie "double" de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le texte s'achève par le calcul de l'homologie de Hochschild de $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$ en terme d'homologie canonique de Poisson de la limite semi-classique $S(\mathfrak{g}^\star)$.

Abstract: Let $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ be a Poisson algebra. The Poisson enveloping algebra $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ permits the study of deformations of $S$. If $(S, \ .\ )$ is smooth, the semi-classical limit $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$ of the Poisson algebra $S$ is isomorphic to the Poisson algebra gr $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. The case of Lie-Poisson algebras $S = S(\mathfrak{g})$ is completely detailled. We prove there exists an isomorphism $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star)$, where $\mathfrak{g}^\star$ is a "double" Lie algebra of $\mathfrak{g}$. We finish with the computation of the Hochschild homology of the Lie-Poisson algebra $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$ which is nothing but the Poisson canonical homology of the semi-classical limit $S(\mathfrak{g}^\star)$ of the Lie-Poisson algebra $S(\mathfrak{g})$.

Classification A.M.S.: 17B63, 13D10, 17B57

Dans ce texte, nous étudions des déformations d'algèbres de Poisson lisses au moyen d'algèbres enveloppantes de Poisson. Pour une algèbre de Poisson $(S, \ .\ , \{\ ,\})$ sur un corps $k$, la notion d'algèbre enveloppante a son origine dans les travaux de G. Rinehart [R]. Dans son étude de la quantification de la cohomologie de Poisson, J. Huebschmannn [H] utilise abondamment ces algèbres enveloppantes de Poisson mais les étudie assez peu en elles-mêmes.
La $k$-algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ peut être grossièrement décrite comme une algèbre d'opérateurs différentiels hamiltoniens sur $S$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est construite à partir de dérivations hamiltonniennes $\partial_g = \{g, -\}$ de $Der_k(S, \ .\ )$. Cette idée se formalise en une description par générateurs et relations. Une propriété universelle permet de reconnaître en $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ une algèbre enveloppante de Rinehart. On en déduit le

**Théorème 1.** *La catégorie des modules de Poisson sur $S$ est équivalente à la catégorie des $\mathcal{U}_{Pois}(S)$-modules.*

Sans hypothèses supplémentaires sur l'algèbre $S$, l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ ne satisfait pas de théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (en abrégé PBW). Nous distinguons donc

nettement parmi les propriétés de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ celles qui sont tributaires de cet important théorème.
Dans une seconde partie, nous étudions la limite semi-classique $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$ d'une $k$-algèbre de Poisson $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ au moyen de l'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. La notion de limite semi-classique nécessitant dans ce cadre le théorème PBW, nous nous restreignons aux algèbres de Poisson lisses (voir définition 1.14). Nous montrons :

**Théorème 2.** *Soit $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ une $k$-algèbre de Poisson. On suppose que $(S, \ .\ )$ est lisse sur $k$. L'algèbre commutative graduée $(gr\,\mathcal{U}_{Pois}(S), \ .\ )$ munie du crochet de Poisson $\{\ ,\ \}_{gr}$ défini par $\{gr_p(u), gr_p(u)\}_{gr} = gr_{p+q-1}(uv - uv)$ est une algèbre de Poisson isomorphe à l'algèbre de Poisson limite semi-classique $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$.*

Plus précisement, désignons par $\Omega^1_{dR}(S)$ le $S$-module des formes différentielles de Kähler de $S$. Alors la limite semi-classique $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$ de l'algèbre de Poisson $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ est isomorphe à la $k$-algèbre de Poisson $(Sym_S(\Omega^1_{dR}(S)), \ .\ , \{\ ,\ \}_{gr})$ sur laquelle le crochet de Poisson $\{\ ,\ \}_{gr}$ est défini par sa restriction à $\Omega^1_{dR}(S)$ par la formule

$$\{adg, bdh\}_{gr} = a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg + abd\{g, h\}.$$

Dans une troisième partie, nous explicitons ces constructions pour les algèbres de Lie-Poisson. Rappelons que si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie, l'algèbre symétrique $(S(\mathfrak{g}), \ .\ )$ est une algèbre de Poisson pour le crochet défini par $\{g, h\} = [g, h]$ pour $g$ et $h$ dans $\mathfrak{g}$, qu'on étend ensuite par bidérivation à $S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$ (une situation un peu plus générale est détaillée dans le texte, où un 2-cocycle du complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ permet de traiter le cas des algèbres enveloppantes de Poisson non augmentées). L'algèbre $(S(\mathfrak{g}), \ .\ , \{\ ,\ \})$ s'appelle une algèbre de Lie-Poisson.
Introduisons l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star)$, "double" de $\mathfrak{g}$ et définie par $\mathfrak{g}^\star = \mathfrak{g}^0 \times \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}^0$ est une copie de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Le crochet $[\ ,\ ]^\star$ de $\mathfrak{g}^\star$ est défini par les égalités $[g^0, h^0]^\star = 0$, $[g, h]^\star = [g, h]$, $[g, h^0]^\star = \partial_g(h)^0 = [g, h]^0$. Nous montrons :

**Théorème 3.** *Soit $S = (S(\mathfrak{g}), \ .\ , \{\ ,\ \})$ une $k$-algèbre de Lie-Poisson. Alors $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$ est une $k$-algèbre isomorphe à l'algèbre $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star)$.*

Les théorèmes 2 et 3 conduisent à la description suivante de la limite semi-classique de l'algèbre de Lie-Poisson $S(\mathfrak{g})$ :

**Corollaire 4.** *Soit $(S(\mathfrak{g}), \ .\ , \{\ ,\ \})$ une algèbre de Lie-Poisson. Désignons par $(S(\mathfrak{g}^\star), \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$ l'algèbre de Lie-Poisson obtenue à partir de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star)$ double de $\mathfrak{g}$ pour laquelle le crochet $\{\ ,\ \}^\star$ est entièrement défini par $\{g^0, h^0\}^\star = 0$, $\{g, h\}^\star = \{g, h\}$, $\{g, h^0\} = \{g, h\}^0$. Alors l'algèbre de Poisson $S(\mathfrak{g})$ a pour limite semi-classique l'algèbre de Poisson $(S(\mathfrak{g}^\star), \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$.*

Les résultats 3 et 4 ci-dessus , joints à un théorème de Kassel sur l'homologie de Hochschild des algèbres enveloppantes $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g})$ conduisent à l'expression l'homologie de Hochschild des algèbres enveloppantes de Poisson. Le résultat s'énonce :

**Théorème 5.** *Soit $S = (S(\mathfrak{g}), \ .\ , \{\ ,\ \})$ une algèbre de Lie-Poisson d'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ et de limite semi-classique l'algèbre de Poisson $(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star)$. Alors L'homologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est isomorphe à l'homologie canonique de la limite semi-classique $S^\star$, c'est-à-dire*

$$H_*(\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))) \cong H_*^{can}(S^\star, \ .\ , \{\ ,\ \}^\star).$$

Ce texte est organisé comme suit :

1. Algèbres enveloppantes de Poisson.
2. Limite semi-classique d'algèbres de Poisson lisses.
3. Les algèbres de Lie-Poisson.
4. Autres exemples.

Nous sommes heureux de remercier Dominique Manchon (Université Blaise Pascal) pour nous avoir suggérer l'étude de la limite semi-classique des algèbres de Poisson.

## 1. Algèbres enveloppantes de Poisson.

**Définition 1.1.** *Une $k$-algèbre de Poisson $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ est la donnée d'une $k$-algèbre commutative $(S, .)$ munie d'une structure de $k$-algèbre de Lie $(S, \{\ ,\ \})$ telle que le crochet de Lie $\{\ ,\ \}$, appelé crochet de Poisson de $S$, est une bidérivation de $(S, \ .\ )$.*

**Définition 1.2.** *Soient $S = (S, \ .\ , \{\ ,\})$ une $k$-algèbre de Poisson et $M$ un $k$-module. On dit que $M$ est un $S$-module de Poisson s'il satisfait les conditions suivantes :*

*1. Le $k$-module $M$ est un $(S, \ .\ )$-module.*

*2. Le $k$-module $M$ est un $(S, \{\ ,\ \})$-module de Lie, défini par le morphisme de $k$-algèbres de Lie $\partial : (S, \{\ ,\ \}) \to (End_k(M), [\ ,\ ]_c)$, où $[f, g]_c = f \circ g - g \circ f$ .*

3. Pour les éléments $a \in S$ et $m \in M$ ces deux structures satisfont les conditions de compatibilités suivantes :

$$(C) \qquad \partial_g(am) = a\partial_g(m) + \{g, a\}m$$

$$(D) \qquad \partial_{ab}(m) = a\partial_b(m) + b\partial_a(m).$$

**Remarque 1.3.** Notons $\partial_g(m) = \{g, m\}$ et convenons que $\{m, g\} = -\{g, m\}$. La condition 2 équivaut à l'identité de Jacobi

$$(J) \qquad \{g, \{h, m\}\} + \{m, \{g, h\}\} + \{h, \{m, g\}\} = 0.$$

La condition $(C)$ est du type connexion et la condition $(D)$ signifie que $\{-, m\}$ est une dérivation de $(S, \ .\ )$.

**Exemple 1.4.** L'algèbre $S$ est un module de Poisson sur elle-même pour $\partial_g = \{g, -\}$.

**Notation 1.5.** Les $S$-modules de Poisson s'organisent en une catégorie notée $S\text{-Mod}_{Pois}$.

*Construction de l'algèbre* $\mathcal{U}_{Pois}(S)$.
Soit $S'$ un $k-$module isomorphe au $k$-module $S$. Pour munir $S \otimes_k T(S')$ d'une loi de $k$-algèbre associative, on remarque que tout élément de $S \otimes_k T(S')$ est somme finie d'éléments de la forme

$$s = a \otimes g'_1 \otimes \cdots \otimes g'_r$$

avec $a \in S$ et $g'_i \in S'$. Pour $\alpha \in S$, le produit à gauche $\alpha s$ est $\alpha s = \alpha a \otimes g'_1 \otimes \cdots \otimes g'_r$. Et pour $g' \in S'$, le produit à droite $sg'$ est $a \otimes g'_1 \otimes \cdots \otimes g'_r \otimes g'$. Pour $g' \in S'$ et $a \in S$, il reste à définir le produit $1 \otimes g' \cdot a \otimes 1$ par la règle de redressement

$$(C') \qquad 1 \otimes g' \cdot a \otimes 1 = a \otimes g' + \{g, a\} \otimes 1.$$

Soit $J$ l'idéal bilatère de la $k$-algèbre $S \otimes T(S')$ engendré par

$$(J') \qquad 1 \otimes \{g, h\}' - (1 \otimes g' \otimes h' - 1 \otimes h' \otimes g')$$

$$(D') \qquad 1 \otimes (ab)' - (a \otimes b' + b \otimes a').$$

**Définition 1.6.** *L'algèbre enveloppante de Poisson de l'algèbre de Poisson* $(S, \ .\ , \{\ ,\ \})$ *est*

$$\mathcal{U}_{Pois}(S) = S \otimes_k T(S')/J.$$

Notons $\iota : S \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ et $\sigma : S \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ les applications définies par $\iota(a) = a \otimes 1 \bmod J$, $\sigma(g) = 1 \otimes g' \bmod J$. On vérifie facilement que $\iota$ est un morphisme d'algèbres associatives. La relation $(C')$ conduit à

$$(C'') \qquad \iota(\{g, a\}) = \sigma(g)\iota(a) - \iota(a)\sigma(g).$$

De manière analogue, $\sigma$ est un morphisme d'algèbres de Lie et la relation $(D')$ conduit à

$$(D'') \qquad \sigma(ab) = \iota(a)\sigma(b) + \iota(b)\sigma(a).$$

**1.7. Propriété universelle de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ .**
Elle s'énonce ainsi.

*Pour tout $(A, \iota_A, \sigma_A)$ où $A$ est une algèbre associative, $\iota_A$ est un morphisme d'algèbre satisfaisant $(C'')$, $\sigma_A$ est un morphisme d'algèbres de Lie satisfaisant $(D'')$, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\varphi$ tel que $\varphi\iota = \iota_A$ et $\varphi\sigma = \sigma_A$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota_A"'] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \arrow[dl, "\varphi"] \\ A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \arrow[dl, "\varphi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'application $\varphi$, nécessairement définie par $\varphi(a \otimes 1 \bmod J) = \iota_A(a)$ et $\varphi(1 \otimes g \bmod J) = \sigma_A(g)$ convient.

**Corollaire 1.8.** *Si $\mathcal{U}$ est une $k$-algèbre associative satisfaisant la propriété universelle ci-dessus, alors $\mathcal{U}$ est isomorphe à $\mathcal{U}_{Pois}(S)$.*

Démonstration. Analogue au cas des algèbres de Lie grâce à la propriété universelle ci-dessus (*cf.* [J], Thm. 1, p. 152).

**Remarque 1.9.** La propriété universelle 1.7 permet d'interpréter $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ comme un cas particulier d'algèbres enveloppante de Rinehart [R]. Pour cela, on munit $\Omega^1_{dR}(S)$ d'une structure de $k$-algèbre de Lie en posant

$$(R) \qquad [adg, bdh] = a[g, b]dh + b[a, h]dg + abd[g, h].$$

L'application $\partial : \Omega^1_{dR}(S) \to Der_k(S)$ définie pour $\omega = adg \in \Omega^1_{dR}(S)$ par $\partial_\omega = a\partial_g = a\{g, -\}$ est un morphisme d'algèbres de Lie $S$-linéaire et satisfaisant la relation de type connexion

$$[\omega_1, a\omega_2] = a[\omega_1, \omega_2] + \partial_{\omega_1}(a)\omega_2$$

pour $a$ dans $S$, $\omega_1$ et $\omega_2$ dans $\Omega^1_{dR}(S)$. Autrement dit, $(S, \Omega^1_{dR}(S))$ est une paire de Lie-Rinehart ([R], 2, [H], 1). Notons $\mathcal{V}(S)$ l'algèbre enveloppante de Rinehart de la paire $(S, \Omega^1_{dR}(S))$ définie dans [R], 2.

**Proposition 1.10.** *L'algèbre associative $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de Rinehart $\mathcal{V}(S)$ de la paire de Lie-Rinehart $(S, \Omega^1_{dR}(S))$.*

Démonstration. L'algèbre $\mathcal{V}(S)$ satisfait la propriété universelle 1.7 ci-dessus (*cf.* [H], 1.6). D'après le corollaire 1.8, on a $\mathcal{V}(S) \cong \mathcal{U}_{Pois}(S)$.

**Corollaire 1.11.** *Soit $(S, \,.\,, \{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson d'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. Alors les catégories $S$-Mod$_{Pois}$ et $\mathcal{U}_{Pois}(S)$-Mod sont équivalentes.*

Démonstration. Un $S$-module de Poisson n'est autre qu'un module sur la paire de Lie-Rinehart $(S, \Omega^1_{dR}(S))$ ([H], 1.2. a et b, p. 62). Les catégories $S$-Mod$_{Pois}$ et $(S, \Omega^1_{dR}(S))$-Mod sont donc équivalentes. D'après Rinehart, la catégorie $(S, \Omega^1_{dR}(S))$-Mod est équivalente à la catégorie $\mathcal{V}(S)$-Mod, où $\mathcal{V}(S)$ est l'algèbre enveloppante de Rinehart de la paire $(S, \Omega^1_{dR}(S))$. On vient de voir que $\mathcal{V}(S)$ est isomorphe à $\mathcal{U}_{Pois}(S)$, cqfd.

Citons quelques propriétés élémentaires de l'algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S)$.

**Proposition 1.12.** *Soit $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson d'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. Alors on a les propriétés suivantes.*
*1. L'application $\iota : S \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ est injective.*
*2. L'algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est unitaire d'unité $\iota(1_S)$.*
*3. L'algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est engendrée par $\iota(S)$ et $\sigma(S)$.*
*4. Si $I$ est un idéal de Poisson de $S$ (c'est-à-dire $IS \subset I$ et $\{I, S\} \subset I$), alors $\mathcal{U}_{Pois}(S/I)$ est une algèbre isomorphe à l'algèbre quotient $\mathcal{U}_{Pois}(S)/(\iota(I), \sigma(I))$.*

Démonstration. La propriété 1 est montrée dans [R], p. 198. Les autres propriétés résultent de la propriété universelle 1.7. et sont de démonstration analogue au cas des algèbres de Lie.
Notons $\mathcal{U}'$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ engendrée par $\iota(S)$ et $\sigma(S)$. Soient $\iota'$ et $\sigma'$ les co-restrictions respectives de $\iota$ et $\sigma$ à $\mathcal{U}'$. Notons encore $j$ l'inclusion $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$. On a les relations $j\iota' = \iota$, $j\sigma' = \sigma$. Par propriété universelle de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$, il existe un morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{U}_{Pois}(S) \to \mathcal{U}'$ tel que $\varphi\iota = \iota'$ et $\varphi\sigma = \sigma'$, d'où $(j\varphi)\iota = \iota$ et $(j\varphi)\sigma = \sigma$. Et par unicité de l'application associée aux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \arrow[dl, "j\varphi"] \\ \mathcal{U}_{Pois}(S) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \arrow[dl, "j\varphi"] \\ \mathcal{U}_{Pois}(S) & \end{tikzcd}$$

on voit que $j\varphi = id$, c'est-à-dire $j$ surjective. Ceci montre 2.
Pour la propriété 3, on remarque $\iota(1_S)\iota(a) = \iota(a)$ et $\iota(1_S)\sigma(g) = (1 \otimes 1 \bmod J)(1 \otimes g' \bmod J) = \sigma(g)$. Puisque $\iota(S)$ et $\sigma(S)$ engendrent $\mathcal{U}_{Pois}(S)$, ceci montre que $\iota(1_S)$ est l'unité de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$.

**Proposition 1.13.** *Soient $(R,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ et $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ deux $k$-algèbres de Poisson.*
*1. L'algèbre commutative $R \otimes_k S$ est une algèbre de Poisson pour le crochet produit tensoriel*

$$\{r \otimes s, r' \otimes s'\} = rr' \otimes \{s, s'\} + \{r, r'\} \otimes ss'$$

*et on a un isomorphisme d'algèbres associatives*

$$\mathcal{U}_{Pois}(R) \otimes_k \mathcal{U}_{Pois}(S) \cong \mathcal{U}_{Pois}(R \otimes_k S).$$

*2. Si $\varphi : R \to S$ est un morphisme d'algèbres de Poisson, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\mathcal{U}(\varphi) : \mathcal{U}_{Pois}(R) \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ tel que $\mathcal{U}(\varphi) \circ \iota_R = \iota_S \circ \varphi$ et $\mathcal{U}(\varphi) \circ \sigma_R = \sigma_S \circ \varphi$, c'est-à-dire tel que les deux diagrammes suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_R"'] & S \arrow[d, "\iota_S"] \\ \mathcal{U}_{Pois}(R) \arrow[r, "\mathcal{U}(\varphi)"] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_R"'] & S \arrow[d, "\sigma_S"] \\ \mathcal{U}_{Pois}(R) \arrow[r, "\mathcal{U}(\varphi)"] & \mathcal{U}_{Pois}(S) \end{tikzcd}$$

*Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et ses conséquences.*

Sans hypothèses supplémentaires, les algèbres enveloppantes de Poisson ne satisfont pas de théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (en abrégé PBW). Néanmoins, si $(S, \,.\,)$ est lisse sur $k$, G. Rinehart a montré un tel résultat.

**Définition 1.14.** *Nous dirons que l'algèbre commutative $(S, \,.\,)$ est lisse si le $S$-module $\Omega^1_{dR}(S)$ des formes différentielles de de Rham est un $S$-module projectif de type fini.*

Pour une justification de cette définition, voir [McC-R], 15.2.12.

Soit $(A, \,.\,) = \cup_{p\in\mathbf{N}}\mathcal{F}_p$ une algèbre associative filtrée de gradué l'algèbre *commutative* $(P, \,.\,)$ avec $P = \oplus_{p\in\mathbf{N}} S_p$ où $P_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{p-1}$. Notons $\mathrm{gr}_p : \mathcal{F}_p \to P_p$ la projection. Alors en posant $\{\mathrm{gr}_p(x), \mathrm{gr}_q(y)\}_{gr} = \mathrm{gr}_{p+q-1}(xy - yx)$, l'algèbre $(P, \,.\,, \{\ ,\ \}_{gr})$ est une algèbre de Poisson.

L'algèbre $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est filtrée en posant $\mathcal{F}_0 = \mathrm{Im}\ \iota$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \mathrm{Im}\ \sigma$, $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{r-1}\mathcal{F}_1$. L'algèbre $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est commutative. On en déduit :

**Proposition 1.15.** *L'algèbre $(\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_{Pois}(S), \,.\,)$ munie du crochet $\{\ ,\ \}_{gr}$ est une algèbre de Poisson.*

Lorsque $S$ est une algèbre de Poisson pour laquelle l'algèbre commutative sous-jacente $(S, \,.\,)$ est lisse sur $k$, nous donnons en 2.7 une autre description de l'algèbre de Poisson $(\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_{Pois}(S), \,.\,, \{\ ,\ \}_{gr})$.

En notant $\alpha = \mathrm{gr}(\iota(a))$ et $\alpha' = \mathrm{gr}(\sigma(a)))$ pour $a \in S$, on a la relation $(\alpha\beta)' = \alpha\beta' + \beta\alpha'$, ce qui montre qu'il existe un morphisme surjectif d'algèbres

$$\eta : \mathrm{Sym}_S(\Omega^1_{dR}(S)) \to \mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_{Pois}(S)).$$

**Théorème 1.16. (Rinehart)** *Si $(S, \,.\,)$ est lisse sur $k$, alors $\eta$ est un isomorphisme.*

La première conséquence de ce théorème de PBW est que si $S$ est lisse sur $k$ alors l'application $\sigma : S \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ est injective.

Citons d'autres propriétés tributaires du théorème de PBW.

**Lemme 1.17.** *Soit $\varphi : R \to S$ un morphisme d'algèbres de Poisson. On suppose $\varphi$ injectif et $S$ lisse. Alors le morphisme d'algèbres associatives $\mathcal{U}(\varphi) : \mathcal{U}_{Pois}(R) \to \mathcal{U}_{Pois}(S)$ est injectif.*

Démonstration. Le noyau de $\mathcal{U}(\varphi)$ est engendré par $\iota_R(\ker(\varphi))$, $\sigma_R(\ker(\varphi))$ et $\sigma_R(\varphi^{-1}(\ker \sigma_S))$. Les deux premiers systèmes de générateurs de $\ker \mathcal{U}(\varphi)$ sont nuls car $\varphi$ est injective et le troisième est nul car $S$ est lisse.

**Corollaire 1.18.** *Soit $R$ une sous-algèbre de Poisson de l'algèbre de Poisson lisse $S$. L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(R)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ engendrée par $\iota_S(R)$ et $\sigma_S(R)$.*

Démonstration. Analogue au cas des algèbres de Lie ([J], p. 161).

**2. Limite semi-classique d'algèbres de Poisson lisses.**

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des algèbres commutatives $(S,\ .\ )$ lisses sur $k$. Si $M$ est un $k$-module, nous désignons par $\widehat{M}$ le $k[[t]]$-module $M\hat{\otimes}_k\ k[[t]]$, où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété pour la topologie $t$-adique.

**Définition 2.1.** *Soit $(S,\ .\ )$ une $k$-algèbre commutative (lisse). On considère $(S,\ .\ )$ comme une algèbre de Poisson à crochet nul. On désigne par $S^\star$ la $k$-algèbre commutative $(S^\star,\ .\ ) = \mathcal{U}_{Pois}((S,\ .\ ,0))$.*

**Remarque 2.2.** D'après 1.6 et 1.16, on a

$$(S^\star,\ .\ ) = (\mathrm{Sym}_S\Omega^1_{dR}(S),\ .\ ).$$

Introduisons la $k$-algèbre $(\widehat{S},\ .\ )$. Le $\widehat{S}$-module $\Omega^1_{dR}(\widehat{S})$ est isomorphe au $\widehat{S}$-module $\widehat{\Omega^1_{dR}(S)}$ et la $k$-algèbre $Sym_{\widehat{S}}(\Omega^1_{dR}(\widehat{S}))$ est isomorphe à la $k$-algèbre $(Sym_S(\Omega^1_{dR}(S)))\hat{\otimes}_k\ k[[t]]$. Ceci montre que l'algèbre $(\widehat{S})^\star = Sym_{\widehat{S}}(\Omega^1_{dR}(\widehat{S})$ est isomorphe à l'algèbre $\widehat{(S^\star)}$. Enfin, il est clair que $S^\star$ est une sous-algèbre de $\widehat{S}^\star$.

Munissons à présent l'algèbre $(S,\ .\ )$ d'un crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$ et considérons la déformation formelle $\widehat{S}_t$ de l'algèbre de Poisson $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \}))$ définie comme l'algèbre de Poisson

$$\widehat{S}_t := (\widehat{S},\ .\ ,\{\ ,\ \}t).$$

Considérons l'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(\widehat{S}_t)$ et désignons par

$$\hat{\eta} : \widehat{S}^\star \to \mathcal{U}_{Pois}(\widehat{S}_t)$$

l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt. La valeur de $\hat{\eta}$ en le monôme $adg_1\cdots dg_r t^i$ est

$$\hat{\eta}(adg_1\cdots dg_r\otimes t^i) = ag_1'\cdots g_r't^i.$$

Si $u$ et $v$ sont dans $S^\star$, on pose

$$u\star v = \hat{\eta}^{-1}(\hat{\eta}(u)\hat{\eta}(v)) = \sum_{i\geq 0}\mu_i(u,v)t^i$$

avec $\mu_i(u,v)\in S^\star$ pout tout $i\geq 0$ et $\mu_0(u,v)=uv$.
Le $\star$-commutateur $\langle u,v\rangle_\star := u\star v - v\star u$ s'écrit sous la forme

$$\langle u,v\rangle_\star = \sum_{i\geq 1}\{u,v\}_i^\star t^i$$

avec $\{u,v\}_i^\star = \mu_i(u,v)-\mu_i(v,u)$. En particulier, pour $i=1$ on a la formule semi-classique

$$\{u,v\}_1^\star = \left(\frac{1}{t}\langle u,v\rangle_\star\right)_{t=0}.$$

**Proposition 2.3.** *Le crochet* $\{\ ,\ \}^\star := \{\ ,\ \}_1^\star$ *est un crochet de Poisson sur l'algèbre commutative* $S^\star$.

Démonstration (folklore). La nullité du terme en $t$ dans l'expression nulle

$$\langle u \star v, w\rangle_\star - u \star \langle v, w\rangle_\star - \langle u, w\rangle_\star \star v$$

conduit à $\{\ ,\ \}_1^\star$ dérivation de $S^\star$, c'est-à-dire

$$\{uv, w\}^\star = u\{v, w\}^\star + \{u, w\}^\star v.$$

De manière analogue, la nullité du terme en $t^2$ dans l'expression nulle

$$\langle u, \langle v, w\rangle_\star\rangle_\star + \langle w, \langle u, v\rangle_\star\rangle_\star + \langle v, \langle w, u\rangle_\star\rangle_\star$$

conduit à l'identité de Jacobi pour le crochet $\{\ ,\ \}^\star$.

**Définition 2.4.** *Soit* $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ *une algèbre de Poisson. L'algèbre commutative* $S^\star = (Sym_S(\Omega^1_{dR}(S),\ .\ )$ *munie du crochet de Poisson* $\{\ ,\ \}^\star$ *s'appelle l'algèbre de Poisson limite semi-classique de l'algèbre de Poisson* $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$.

**Proposition 2.5.** *Soit* $(S,\ .\ ,\{\ ,\})$ *une algèbre de Poisson. Alors le* $S$*-module* $\Omega^1_{dR}(S)$ *est muni d'une structure de* $k$*-algèbre de Lie* $[\ ,\ ]^\star$ *en posant*

$$(R) \qquad [adg, bdh]^\star = a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg + abd\{g, h\}.$$

*Le crochet* $\{\ ,\ \}^\star$ *de la limite semi-classique* $S^\star$ *est obtenu en étendant le crochet de Lie* $[\ ,\ ]^\star$ *par bidérivation sur* $S^\star$.

Démonstration. Dans $\mathcal{U}_{Pois}(\widehat{S}_t)$, on a

$$\hat\eta(adg)\hat\eta(bdh) = ag'bh' = abg'h' + a\{g, b\}h't.$$

De même, on a

$$\hat\eta(bdh)\hat\eta(adg) = bah'g' + b\{h, a\}g't.$$

D'où la valeur du commutateur

$$\begin{aligned}[\hat\eta(adg), \hat\eta(bdh)] &= ab(g'h' - h'g') + (a\{g, b\}h' - b\{h, a\}g')t \\ &= ab\{g, h\}'t + a\{g, b\}h't + b\{a, h\}g't \\ &= t\hat\eta(abd\{g, h\} + a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg).\end{aligned}$$

Et donc dans $\widehat{S}^\star$, on a

$$\langle adg, bdh\rangle_\star = \hat\eta^{-1}[\hat\eta(adg)\hat\eta(bdh)] = t(abd\{g, h\} + a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg).$$

Ceci montre que $\{adg, bdh\}^\star = abd\{g, h\} + a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg$. Autrement dit, la restriction à $\Omega^1_{dR}(S) \otimes_k \Omega^1_{dR}(S)$ du crochet de Poisson semi-classique $\{\ ,\ \}^\star : S^\star \otimes_k S^\star \to S^\star$ est à valeurs dans $\Omega^1_{dR}(S)$. Il s'agit donc d'un crochet de Lie sur $\Omega^1_{dR}(S)$.

La deuxième affirmation est désormais évidente car, par bidérivation, un crochet de Poisson sur $S^\star$ est entièrement défini par sa restriction à $\Omega^1_{dR}(S)$.

La formule $(R)$ permet de reconnaître en $\{\ ,\ \}^\star$ un crochet introduit par Rinehart (et déjà présent en 1.9.). Expliquons cette coïncidence.

**Proposition 2.6.** *Soit $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson et soit $[\ ,\ ]$ un crochet de Lie sur $\Omega^1_{dR}(S)$. On suppose que l'application*

$$d : (S, \{\ ,\ \}) \to (\Omega^1_{dR}(S), [\ ,\ ])$$

*est un morphisme d'algèbres de Lie et que l'application*

$$\partial : (\Omega^1_{dR}(S), [\ ,\ ]) \to Der_k((S,\ .\ ))$$

*définie par $\partial_{adg} = a\{g, -\}$ est telle que*

$$(C) \qquad [\omega_1, a\omega_2] = a[\omega_1, \omega_2] + \partial_{\omega_1}(a)\omega_2.$$

*Alors le crochet de Lie $[\ ,\ ]$ est la restriction à $\Omega^1_{dR}(S)$ du crochet crochet limite semi-classique $\{\ ,\ \}^\star$.*

Démonstration. Rappelons que la condition $(C)$ de type connexion imposée sur l'application $\partial$ signifie que $(S, \Omega^1_{dR}(S))$ est une paire de Lie-Rinehart. La condition $(C)$ conduit à

$$[adg, bdh] = ab[dg, dh] + b\{a, h\}dg + a\{b, g\}dh.$$

Et puisque $d$ est un morphisme d'algèbres de Lie, on a $[dg, dh] = d\{g, h\}$, ce qui conduit à la relation $(R)$. Ceci montre $[\ ,\ ] = \{\ ,\ \}^\star$.

**Théorème 2.7.** *Soit $(S,\ .\ ,\{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson lisse d'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ et de limite semi-classique l'algèbre de Poisson $(S^\star,\ .\ ,\{\ ,\ \}^\star)$. Alors les algèbres de Poisson $(\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_{Pois}(S),\ .\ ,\{\ ,\ \}_{gr})$ et $(S^\star,\ .\ ,\{\ ,\ \}^\star)$ sont isomorphes.*

Démonstration. D'après le théorème de PBW, les algèbres commutatives $(\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_{Pois}(S),\ .\ )$ et $(Sym_S\Omega^1_{dR}(S),\ .\ )$ sont isomorphes. Il reste à s'assurer que les crochets de Poisson $\{\ ,\ \}_{gr}$ et $\{\ ,\ \}^\star$ coïncident. Pour $adg$ et $bdh$ dans $\Omega^1_{dR}(S)$, on a

$$\{adg, bdh\}_{gr} = \{\mathrm{gr}_1(ag'), \mathrm{gr}_1(bh')\}_{gr} = \mathrm{gr}_1(ag'bh' - bh'ag').$$

Un calcul analogue à celui de la démonstration 2.5 montre que

$$ag'bh' - bh'ag' = ab\{g, h\}' + a\{g, b\}h' + b\{a, h\}g'$$

d'où

$$\mathrm{gr}_1(ag'bh' - bh'ag') = abd\{g, h\} + a\{g, b\}dh + b\{a, h\}dg = \{adg, bdh\}^\star.$$

## 3. Les algèbres de Lie-Poisson.

*Notations.*
Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie et soit $\alpha \in Z^2(\mathfrak{g}, k)$ un 2-cocycle du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux, c'est-à-dire une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{g}$ vérifiant

$$\alpha(u, [v, w]) + \alpha(w, [u, v]) + \alpha(v, [w, u]) = 0.$$

Un triplet $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ comme ci-dessus sera appelé triplet de Sridharan.

**Définition 3.1.** *Au triplet de Sridharan $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$, on associe l'algèbre enveloppante de Sridharan*

$$\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}, \alpha) = T(\mathfrak{g})/I_\alpha$$

*où $I_\alpha$ est l'idéal bilatère de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $u \otimes v - v \otimes u - [u, v] - \alpha(u, v)$ avec $u$ et $v$ dans $\mathfrak{g}$.*

Remarquons que si le 2-cocycle $\alpha$ est nul, on a $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}, 0) = \mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g})$.

**Définition 3.2.** *Au triplet de Sridharan $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$, on associe l'algèbre de Lie-Poisson*

$$S(\mathfrak{g}, \alpha) = (S(\mathfrak{g}),\ .\ , \{\ ,\ \}_\alpha)$$

*d'algèbre commutative sous-jacente l'algèbre symétrique $(S(\mathfrak{g}),\ .\ )$ et de crochet de Poisson $\{\ ,\ \}_\alpha$ défini pour $u$ et $v$ dans $\mathfrak{g}$ par $\{u, v\}_\alpha = [u, v] + \alpha(u, v)$, ce crochet est ensuite étendu par bidérivation à $S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$.*

Rappelons sans démonstration le résultat suivant ([S], [Ka]) :

**Proposition 3.3.** *Les algèbres de Poisson gr $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}, \alpha))$ et $S(\mathfrak{g}, \alpha)$ sont isomorphes.*

*Description de $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$.*
Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ un triplet de Sridharan et soit $S(\mathfrak{g}, \alpha)$ l'algèbre de Lie-Poisson $(S(\mathfrak{g}), . , \{\ ,\ \}_\alpha)$ associée à ce triplet de Sridharan. Introduisons l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}^0$ d'espace vectoriel sous-jacent $\mathfrak{g}$. On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^\star = \mathfrak{g}^0 \times \mathfrak{g}$ de dimension double de celle de $\mathfrak{g}$ d'un crochet noté $[\ ,\ ]^\star$ défini par $[g^0, h^0]^\star = 0$, $[g, h]^\star = [g, h]$, $[g, h^0]^\star = [g, h]^0$. Il est immédiat de vérifier que $[\ ,\ ]^\star$ est un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^\star$. On définit un 2-cocycle $\alpha^\star$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^\star$ par les relations $\alpha^\star(g^0, h^0) = 0$, $\alpha^\star(g, h) = 0$, $\alpha^\star(g, h^0) = \alpha(g, h)$. On dispose donc d'un nouveau triplet de Sridharan $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star, \alpha^\star)$.

**Définition 3.4.** *Le triplet $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star, \alpha^\star)$ s'appelle le double du triplet $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$. L'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star)$ s'appelle le double de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$.*

**Théorème 3.5.** *Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ un triplet de Sridharan. Avec les notations ci-dessus, l'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}, \alpha))$ de l'algèbre de Lie-Poisson $S(\mathfrak{g}, \alpha)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$ associée au double $((\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star, \alpha^\star)$ du triplet $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ .*

Démonstration. Notons $\iota$ l'inclusion $\mathfrak{g}^\star \to \mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$. Les applications

$$i : S(\mathfrak{g}, \alpha) \to \mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$$

et

$$\sigma : S(\mathfrak{g}, \alpha) \to \mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$$

respectivement définies par $i(g) = \iota(g^0, 0)$ et $\sigma(g) = \iota(0, g)$ satisfont la propriété universelle de l'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}, \alpha))$.

*Description de la limite semi-classique.*
En vertu de 3.5, 3.3 et 2.7, cette description est immédiate.

**Théorème 3.6.** *Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ un triplet de Sridharan de double le triplet $(\mathfrak{g}^\star, [\ ,\ ]^\star, \alpha^\star)$. Alors l'algèbre de Lie-Poisson $S(\mathfrak{g}, \alpha)$ admet l'algèbre de Lie-Poisson $S(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$ pour limite semi-classique, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme d'algèbres de Poisson $S(\mathfrak{g})^\star \cong S(\mathfrak{g}^\star)$.*

*Homologie de $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$.*

L'étude homologique de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ reste délicate en toute généralité, même dans le cas d'une algèbre de Poisson $S$ lisse sur $k$. En effet, si dans cette situation Rinehart a bien construit une $\mathcal{U}_{Pois}(S)$-résolution projective de $S$ qui permet une étude homologique de $S$ en tant que $\mathcal{U}_{Pois}(S)$-module (cf. par exemple [H]), on ne connaît pas, même dans le cas lisse, de $\mathcal{U}_{Pois}(S) \otimes_k \mathcal{U}_{Pois}(S)^{op}$-résolution projective de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$, ce qui est pourtant nécessaire pour une étude homologique de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$. En reconnaissant en $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}))$ une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, on parvient à un résultat complet grâce à un résultat de Kassel sur l'homologie de Hochschild des algèbres $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g})$.

Rappelons la définition de l'homologie canonique d'une algèbre de Poisson ([Ko],[B]).
Soit $(S, .\ , \{\ ,\ \})$ une algèbre de Poisson. Sur le $S$-module gradué $\Omega^*_{dR}(S)$ des formes différentielles de $S$, on définit une application

$$\delta : \Omega^*_{dR}(S) \to \Omega^{*-1}_{dR}(S)$$

satisfaisant $\delta^2 = 0$ par

$$\delta(a dg_1 \cdots dg_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1}\{a, g_i\} dg_1 \cdots d\breve{g}_i \cdots dg_r$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} a d\{g_i, g_j\} dg_1 \cdots d\breve{g}_i \cdots d\breve{g}_j \cdots dg_r.$$

où, comme toujours, $d\breve{g}$ signifie qu'on ôte le terme $dg$ du monôme.

**Définition 3.7.** *L'homologie du complexe de chaînes $(\Omega^*_{dR}(S), \delta)$ s'appelle l'homologie canonique de l'algèbre de Poisson $S$. On a donc*

$$H^{can}_*(S) := H_*(\Omega^*_{dR}(S), \delta).$$

Le théorème de Kassel s'énonce:

**Théorème 3.8.** ([Ka]) *Soit* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$ *un triplet de Sridharan. L'homologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante de Sridharan* $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}, \alpha)$ *est isomorphe à l'homologie canonique de l'algèbre de Lie-Poisson* $S(\mathfrak{g}, \alpha)$, *c'est-à-dire*

$$H_*(\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}, \alpha)) \cong H_*^{can}(S(\mathfrak{g}, \alpha)).$$

**Corollaire 3.9.** *Soit* $(S(\mathfrak{g}, \alpha),\ .\ , \{\ ,\ \}_\alpha)$ *l'algèbre de Lie-Poisson associée au triplet de Sridharan* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \alpha)$. *L'homologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante de Poisson* $\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}, \alpha))$ *est isomorphe à l'homologie canonique de la limite semi-classique* $S(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$ *de l'algèbre de Poisson* $S$, *c'est-à-dire*

$$H_*(\mathcal{U}_{Pois}(S(\mathfrak{g}, \alpha))) \cong H_*^{can}(S(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)).$$

Démonstration: Cela résulte de 3.5, du théorème de Kassel et de 3.6.

## 4. Autres exemples.

Commençons par la description de $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ pour l'espace symplectique standart $S_{2n}$ de dimension $2n$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie abélienne de dimension $2n$, de base $(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$ et soit $\alpha$ le 2-cocycle défini pour $1 \leq i \leq n$ par $\alpha(X_i, Y_i) = 1$, et nul sur les autres couples d'éléments de la base. L'algèbre de Lie-Poisson $S_{2n} = S(\mathfrak{g}, \alpha)$ s'appelle l'espace symplectique standart. L'algèbre de Poisson $S_{2n}$ est donc l'algèbre commutative $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n]$ munie du crochet symplectique défini par $\{X_i, Y_i\} = 1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^\star$ est abélienne de dimension $4n$, de base $(q_1, \cdots, q_{2n}, p_1, \cdots, p_{2n})$ avec $q_i = X_i^0$, $q_{n+i} = Y_i^0$, $p_i = -Y_i$, $p_{n+i} = X_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Le 2-cocycle $\alpha^\star$ est défini par $\alpha^\star(p_i, q_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq 2n$. On reconnaît en $\mathcal{U}_{Lie}(\mathfrak{g}^\star, \alpha^\star)$ l'algèbre de Weyl $A_{2n}(\mathbf{C})$. On a donc :

**Proposition 4.1.** *L'espace symplectique standart* $S_{2n}$ *est d'algèbre enveloppante de Poisson l'algèbre de Weyl* $A_{2n}(\mathbf{C})$.

**Remarque 4.2.** Pour $F(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) \in S_{2n}$ les applications $\iota : S_{2n} \to A_{2n}(\mathbf{C})$ et $\sigma : S_{2n} \to A_{2n}(\mathbf{C})$ définies par

$$\iota(F) = F(q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}, \cdots, q_{2n})$$

et

$$\sigma(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\iota F)}{\partial q_i} p_{n+i} - \frac{\partial(\iota F)}{\partial q_{n+i}} p_i$$

satisfont la propriété universelle 1.7, ce qui permet de retrouver directement l'isomorphisme

$$\mathcal{U}_{Pois}(S_{2n}) \cong A_{2n}(\mathbf{C}).$$

On remarque que $\mathcal{U}_{Pois}(S_{2n})$ est l'anneau $\mathcal{D}(S_{2n})$ des opérateurs différentiels sur $S_{2n}$. La proposition 4.3 explique ce phénomène. Pour énoncer cette proposition, fixons quelques notations. Soit $(S, .)$ une algèbre, d'anneau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}(S)$ (*cf.* [McC-R], 15.5.2). On désigne par $\Delta(S)$ la sous-algèbre de $End_k(S)$ engendrée par $S$ et $Der_k(S)$. Lorsque $(S, \ . \ , \{ \ , \ \})$ est une algèbre de Poisson, on introduit le sous-module $Der_k^H(S)$ de $Der_k(S)$ engendré par les dérivations hamiltoniennes $\partial_g = \{g, -\}$, pour $g \in S$ et on note $\Delta^H(S)$ la sous-algèbre de $\Delta(S)$ engendrée par $S$ et $Der_k^H(S)$.

**Proposition 4.3.** *Soit $(S, \ . \ , \{ \ , \ \})$ une algèbre de Poisson. On suppose les conditions suivantes satisfaites.*
*(1) L'algèbre commutative $(S, \ . \ )$ est lisse sur $k$;*
*(2) l'algèbre de Lie $(S, \{ \ , \ \})$ est centrale;*
*(3) on a l'égalité $Der_k^H(S) = Der_k(S)$.*
*Alors $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{D}(S)$ des opérateurs différentiels sur $S$.*

Démonstration. La surjection $\varphi : \mathcal{U}_{Pois}(S) \to \Delta^H(S)$ définie par $\varphi(a \otimes 1 \text{ mod } J) = \mu_a$ (multiplication par $a$) et $\varphi(1 \otimes g' \text{ mod } \ J) = \partial_g$ est de noyau nul d'après l'hypothèse (2). D'après (3), on a l'égalité $\Delta_k^H(S) = \Delta_k(S)$ et d'après (1), on a un isomorphisme $\Delta_k(S) \cong \mathcal{D}(S)$ (*cf.* [McC-R], 15.5.6), cqfd.

Le corollaire 1.18. permet d'énoncer la proposition suivante, utile dans l'étude des invariants d'une algèbre de Poisson sous l'opération d'un groupe.

**Proposition 4.4.** *Soit $(S, \ . \ , \{ \ , \ \})$ une $k$-algèbre de Poisson. On suppose que l'algèbre commutative $(S, \ . \ )$ est lisse sur $k$. Si $G$ est un groupe d'automorphismes de Poisson de $S$, $\mathcal{U}_{Pois}(S^G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{U}_{Pois}(S)^G$.*

Il convient de remarquer qu'en général, l'algèbre de Poisson $S^G$ n'est pas lisse sur $k$. Par ailleurs, sans hypothèses supplémentaires, les algèbres $\mathcal{U}_{Pois}(S^G)$ et $\mathcal{U}_{Pois}(S)^G$ peuvent être très différentes comme le montre l'exemple suivant.

**Proposition 4.5.** *Soit $S$ l'algèbre de Poisson $\mathbf{C}[X, Y]$, de crochet $\{X, Y\} = 1$. Le groupe cyclique $G = \mathbf{Z}/r$ de générateur $\tau$ opère sur $S$ par automorphismes de Poisson en posant $\tau X = \xi X$, $\tau Y = \xi^{-1} Y$, où $\xi$ est une racine primitive $r$-ième de l'unité. Alors les algèbres $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{Pois}(S^G)$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{Pois}(S)^G$ ne sont pas Morita équivalentes.*

Démonstration. Il s'agit de calculs dans l'algèbre de Weyl $A_2 = A_2(\mathbf{C})$. En effet, $\mathcal{U}_{Pois}(S) = A_2$ donc $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{Pois}(S)^G = A_2^G$. D'après [AL], le groupe d'homologie de Hochschild $H_0(A_2^G)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $r - 1$. Nous montrons à présent que le groupe d'homologie de Hochschild $H_0(\mathcal{U}_{Pois}(S^G))$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.
Notons $\varepsilon_1 = (1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1)$ la base canonique de $\mathbf{Z}^2$. L'algèbre de Weyl $A_2$ est $\mathbf{Z}^2$-graduée par $deg(p_i) = \varepsilon_i = -deg(q_i)$ et $\mathcal{U}$ est un sous-algèbre $\mathbf{Z}^2$-graduée de $A_2$.
L'algèbre d'invariants $S^G$ est la $\mathbf{C}$-algèbre singulière $\mathbf{C}[X^n, Y^n, XY]$. D'après 1.18, son algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{Pois}(S^G)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{U}$ engendrée par les élements $z_1 = q_1^r$, $z_2 = q_2^r$, $z_3 = q_1 q_2$, $z_4 = q_1^{r-1} p_2$, $z_5 = q_2^{r-1} p_1$ et $w = q_1 p_1 - q_2 p_2$. Ces éléments sont homogènes pour la $\mathbf{Z}^2$-graduation de $\mathcal{V}$ et sont de degré respectif $\vec{v}_1 = (-r, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, -r)$, $\vec{v}_3 = (-1, -1)$, $\vec{v}_4 = (1 - r, 1)$, $\vec{v}_5 = (1, 1 - r)$ et $\vec{v} = (0, 0)$. Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe des demi-droites de vecteurs directeurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_5$. Puisque $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre

graduée de $\mathcal{U}$, on écrit $\mathcal{V} = \oplus_{c \in \mathbf{Z}^2} \mathcal{V}_c$ et $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \oplus_{c \in \mathbf{Z}^2} [\mathcal{V}, \mathcal{V}]_c$ avec $[\mathcal{V}, \mathcal{V}]_c = [\mathcal{V}, \mathcal{V}] \cap \mathcal{V}_c$. On remarque que si $c \in \mathcal{C}$ alors $-c \notin \mathcal{C}$ et donc $[\mathcal{V}, \mathcal{V}]_0 = [\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0]$. Mais $\mathcal{V}_0 = \mathbf{C}[w]$ est une algèbre commutative et donc $\mathcal{V}_0/[\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0] = \mathcal{V}_0 = \mathbf{C}[w]$ est un sous-espace de $H_0(\mathcal{V}) = \oplus_{c \in \mathbf{Z}^2} \mathcal{V}_c/[\mathcal{V}, \mathcal{V}]_c$, cqfd.

Remarque 4.6. Puisque $\mathcal{V}$ n'est pas Morita équivalente à $\mathcal{U}$, l'inclusion $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ est nécessairement stricte. En effet, $p_1^r$ appartient à $\mathcal{U}$ mais $deg(p_1^r) \notin \mathcal{C}$ donc $p_1^r$ n'appartient pas à $\mathcal{V}$.

Remarque 4.7. Cet exemple montre la différence de comportement par passage aux invariants entre l'algèbre enveloppante de Poisson $\mathcal{U}_{Pois}(S)$ de $S$ et l'anneau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}(S)$ de $S$. En effet, d'après un théorème de T. Levasseur [Le], on a $\mathcal{D}(S^G) = \mathcal{D}(S)^G$ dès que le sous-groupe $G$ de $\mathrm{Aut}_{alg}(S)$ est sans pseudo-réflexions, ce qui est le cas dans l'exemple ci-dessus.

**Bibliographie**

[A-L], Alev J. & Lambre T., Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl, *K-theory*, **18**, 401-411, 1999.

[B], Brylinsky J.-L., A differential complex for Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.*, **28**, 93-114, 1988.

[H], Huebschmann J., Poisson cohomology and quantization, *J. reine angew. Math.*, **408**, 57-113, 1990.

[J], Jacobson N., *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962.

[Ka], Kassel C., L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes, *Invent. Math.*, **91**, 221-251, 1988.

[Ko], Koszul J.-L., Crochet de Schouten-Nijenjuis et cohomologie, *in* "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui", *Astérisque, Soc. Math. France*, hors série, 251-271, 1985.

[Le] Levasseur T., Anneaux d'opérateurs différentiels, Lecture Notes Math., **867**, 157-173.

[McC-R], McConnell J. & Robson J., *Noncommutative noetherian rings*, Wiley, 1987.

[R], Rinehart G., Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Am. Math. Soc.*, **108**, 195-222, 1963.

[S], Sridharan G., Filtered algebras and representations of Lie algebras, *Trans. Am. Math. Soc.*, **100**, 530-550, 1961.