Actions d'algèbre de Hopf d'après Y. Zhu.

Version du 02/10/2001.

Cyrille Ospel
Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal
Campus des Cézeaux, 63177 Aubière Cedex France
e-mail: ospel@ucfma.univ-bpclermont.fr

Introduction.

Cet exposé est un résumé du travail de Y. Zhu [5], [6] concernant l'action d'algèbre de Hopf sur des modules algèbres.

Soient G un groupe fini, S un G-ensemble, et G_x le stabilisateur d'un point x de S.
Il est bien connu que si l'action est transitive alors $S \simeq \frac{G}{G_x}$ en tant que G-ensembles.
Ceci implique que la connaissance d'un stabilisateur définit la structure de G-ensemble, et que $\mathrm{Card}(G_x) = \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(S)}$.
Dans ses travaux Y. Zhu généralise ces résultats à l'action d'une algèbre de Hopf sur un module algèbre. Il en donne ensuite une application possible à la résolution d'une conjecture de Kaplansky concernant la dimension de module irréductible d'une algèbre de Hopf semisimple.
Ces généralisations ont pour modèle l'algèbre de Hopf de $k[G]$ où G est un groupe et l'ensemble $\mathcal{F}(S)$ des fonctions définies sur S à valeurs dans k, munit d'une structure de $k[G]$-module algèbre. On peut ainsi établir un tableau de correspondances entre la théorie des G-ensembles et celle des modules algèbres sur une algèbre de Hopf :

GROUPE	ALGEBRE DE GROUPE	ALGEBRE DE HOPF
G un groupe	$k[G]$ est une algèbre de Hopf	H une algèbre de Hopf
S G-ensemble	$\mathcal{F}(S)$ est un $k[G]$-module algèbre	A un H-module algèbre
T une partie de S	$\mathcal{F}(T)$ est un $\mathcal{F}(S)$-module	V un A-module

Table 1: Correspondances G-ensemble $\to$ H-module algèbre.

Convention : k est un corps de caractéristique 0 et algébriquement clos.
Tout les k-espaces vectoriels sont de dimension finie.
H est une algèbre de Hopf (en particulier c'est un k-espace vectoriel, donc de dimension finie), et A un H-module algèbre.

Plan

1) Notion d'orbite et de stabilisateur.

2) Lien entre un stabilisateur et la structure de H-module algèbre.

3) Formule pour la dimension du stabilisateur.

4) Application à une conjecture de Kaplansky.

1 Notion d'orbite, d'action transitive et de stabilisateur.

Rappelons que si H est une algèbre de Hopf, un H-module algèbre A est une algèbre munie d'une structure de H-module vérifiant pour tout $h \in H$ et $a, b \in A$:

$$h.(ab) = \sum (h_{(1)}.a)(h_{(2)}.b), \qquad h.1_A = \varepsilon(h)1_A.$$

Dans le cas d'un G-ensemble S, on a la notion d'orbite et de stabilisateur d'un point x de S. D'après la table 1 la notion correspondante à un point (ou une partie) de S est celle de A-module. On va donc définir l'orbite et le stabilisateur d'un A-module V. Pour cela on a besoin d'un morphisme de H-modules algèbres entre A et $A \otimes H^*$.

1.1 Orbite d'un A-module et action transitive.

En utilisant la structure d'algèbre de Hopf de H il est facile de voir que H^* est un H-module algèbre. Le produit et l'unité sont ceux du dual de H. L'action de H est donnée pour $h \in H$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$h \rightharpoonup \alpha = \sum \alpha_{(2)}(h)\alpha_{(1)}.$$

Il est alors facile de voir que $A \otimes H^*$ est un H-module algèbre. La structure d'algèbre provient du produit tensoriel de deux algèbres. Celle de module est donnée pour $h \in H$, $a \in A$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$h \rightharpoonup (a \otimes \alpha) = a \otimes h \rightharpoonup \alpha.$$

Il reste à définir le morphisme de H-modules algèbres.
La structure de H-module de A permet de munir A d'une structure de H^*-comodule à droite. Soit $(e_i)_{i\in I}$ et $(e^i)_{i\in I}$ une base de H et sa base duale. Le coproduit extérieur δ_R de A est donné pour $a \in A$ par :

$$\delta_R(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} = \sum e_i.a \otimes e^i.$$

Notons que l'on a alors pour $h \in H$ et $a \in A$: $h.a = \sum a_{(1)}(h)a_{(0)}$.
On peut alors montrer le lemme :

Lemme 1.1 *L'application $\delta_R : A \to A \otimes H^*$ est un morphisme de H-modules algèbres. De plus c'est un plongement.*

Soit $\Pi : A \to \mathrm{End}(V)$ le morphisme d'algèbres associé au A-module V.
La composé $\Pi_V = \Pi \circ \delta_R$ est alors un morphisme de H-modules algèbres.
On peut maintenant définir l'orbite de V par :

Définition 1.1 *Le H-module algèbre $A/\mathrm{Ker}(\Pi_V)$ est appelé l'orbite de V.*

Cas de l'algèbre d'un groupe et du module algèbre des fonctions.
Soient S un G-ensemble et $x \in S$. Notons $(\delta_g)_{g\in G}$ la base duale de la base naturelle de $k[G]$.
L'algèbre $\mathcal{F}(S)$ est un $k[G]$-module algèbre. Le produit extérieur est défini pour tout $f \in \mathcal{F}(S)$, $g \in G$ et $s \in S$ par :

$$(g.f)(s) = f(g^{-1}.s).$$

L'espace des fonctions $\mathcal{F}(\{x\})$ est isomorphe à k. C'est un $\mathcal{F}(S)$-module avec pour $f \in \mathcal{F}(S)$ et $\lambda \in k$:

$$f.\lambda = f(x)\lambda.$$

L'application $\Pi_x : \mathcal{F}(S) \to \mathrm{End}(k) \otimes k[G]^* \simeq k[G]^*$ est définie pour $f \in \mathcal{F}(S)$ par :

$$\Pi_x(f) = \sum_{g\in G} f(g^{-1}x)\delta_g.$$

Notons O_x l'orbite de x. On a alors $\mathrm{Ker}(\Pi_x) = \Big\{ f \in \mathcal{F}(S) \mid f_{|O_x} = 0 \Big\}$.
Donc l'orbite du $\mathcal{F}(S)$-module $\mathcal{F}(\{x\})$ est $\mathcal{F}(O_x)$.

De la même manière si $T = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie de S, l'espace $\mathcal{F}(T) \simeq k^n$ est un $\mathcal{F}(S)$-module. Le produit extérieur est donné pour $f \in \mathcal{F}(S)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ par :

$$f.(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (f(x_1)\lambda_1, \dots, f(x_n)\lambda_n).$$

L'orbite de ce module est alors $\mathcal{F}(O_{x_1} \cup \dots \cup O_{x_n})$.

Définition locale de transitif.

Définition 1.2 *Le A-module V est transitif si et seulement si $\mathrm{Ker}(\Pi_V) = \{0\}$. C'est-à-dire si et seulement si l'orbite du A-module V est A.*

Il est immédiat de voir que si S est un G-ensemble transitif alors pour tout $x \in S$ le $\mathcal{F}(S)$-module k associé à x est transitif.

1.2 Stabilisateur d'un A-module

Pour définir la notion de stabilisateur, nous avons besoin du double de Heisenberg, $\mathcal{H}(H)$, de l'algèbre de Hopf H. Cet espace peut être défini de deux façons.

1) Tout d'abord H peut être muni d'une structure de H^*-module algèbre. Le produit extérieur est défini pour $h \in H$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$\alpha \rightharpoonup h = \sum \alpha(h_{(2)})h_{(1)}.$$

Le double $\mathcal{H}(H)$ est alors un H-module algèbre à gauche obtenu par produit tordu de H par H^*.

2) On peut aussi munir H^* d'une structure de H-module algèbre à droite. Le produit extérieur est défini pour $\alpha \in H^*$, et $h \in H$ par :

$$\alpha \leftharpoonup h = \sum \alpha_{(1)}(h)\alpha_{(2)}.$$

Le double $\mathcal{H}(H)$ est alors un H^*-module algèbre à droite obtenu par produit tordu de H^* par H.

Dans tous les cas $\mathcal{H}(H)$ est défini en tant qu'espace vectoriel par $\mathcal{H}(H) = H \otimes H^*$. Le produit est donné pour $h, h' \in H$ et $\alpha, \alpha' \in H^*$ par :

$$(h \otimes \alpha).(h' \otimes \alpha') = \sum h(\alpha_{(1)} \rightharpoonup h') \otimes \alpha_{(2)}\alpha'.$$

De plus, les inclusions canonique

$$\begin{array}{rccc} \iota_1 : & H & \longrightarrow & \mathcal{H}(H) \\ & h & \longmapsto & h \otimes 1_{H^*} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \iota_2 : & H^* & \longrightarrow & \mathcal{H}(H) \\ & \alpha & \longmapsto & 1_H \otimes \alpha \end{array}$$

sont respectivement des morphismes de H^*-modules algèbres à droite et de H-modules algèbres. La structure de H^*-module algèbre à droite de H est définie pour $h \in H$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$h \rightharpoonup \alpha = \sum \alpha(h_{(1)})h_{(2)}.$$

Afin de définir le stabilisateur d'un A-module V, on compose Π_V et ι_2. Le morphisme obtenu est un morphisme de H-modules algèbres entre A et $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$, on le note encore Π_V (ι_2 étant une inclusion la définition de l'orbite ne change pas).
On définit alors un sous ensemble A' de $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ par :

$$A' = \{x \in \mathrm{End}(V) \otimes \iota_1(H) \mid xy = yx \ \forall y \in \Pi_V(A)\}.$$

Grâce à l'inclusion ι_1 on voit encore A' comme un sous ensemble de $\mathrm{End}(V) \otimes H$.
Il est clair que A' est une sous-algèbre de $\mathrm{End}(V) \otimes H$.
On peut munir $\mathrm{End}(V) \otimes H$ d'une structure de H^*-module algèbre à droite. Elle est définie pour $f \otimes h \in \mathrm{End}(V) \otimes H$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$(f \otimes h) \rightharpoonup \alpha = f \otimes (h \rightharpoonup \alpha).$$

La sous-algèbre A' est alors un H^*-module algèbre à droite.

A ce stade on pourrait définir le stabilisateur du A-module V comme étant le H^*-module algèbre à droite A'. On verra par le suite que pour pouvoir récupérer, dans le cas transitif, des informations sur l'action d'algèbre de Hopf de départ il nous faut plus de données. Pour cela on munit le A-module V de la structure de A'-module provenant du morphisme d'algèbres $\mathrm{Id}\otimes\varepsilon : \mathrm{End}(V)\otimes H \to \mathrm{End}(V)$ restreint à A'. Le A'-module ainsi obtenu est noté V'.
On peut maintenant donner la définition du stabilisateur du A-module V :

Définition 1.3 *Le stabilisateur du A-module V est le couple (A', V').*

Cas de l'algèbre d'un groupe et du module algèbre des fonctions.
Soient S un G-ensemble et $x \in S$. L'application $\Pi_x : \mathcal{F}(S) \to \mathcal{H}(H)$ est définie pour $f \in \mathcal{F}(S)$ par :

$$\Pi_x(f) = 1_H \otimes \sum_{g\in G} f(g^{-1}x)\delta_g.$$

Il est facile de montrer qu'un élément $z \in k[G]$ est dans $\mathcal{F}(S)'$ si et seulement si il est combinaison linéaire d'éléments de G_x. On a donc $\mathcal{F}(S)' = k[G_x]$.
L'espace k' est le $k[G_x]$-module de dimension 1 associé au morphisme d'algèbres ε.

2 Définition de la structure de module algèbre en fonction du stabilisateur.

On va montrer que dans le cas d'un A-module transitif V on peut retrouver, à partir du stabilisateur, la structure de H-module algèbre de A.

2.1 Enoncé du théorème.

De manière générale, si B est un H^*-module algèbre à droite et W un B-module, on peut faire une construction analogue à celle du stabilisateur. Notons ρ_W le morphisme d'algèbres associé W.
Comme B est un H^*-module algèbre à droite, il a une structure naturelle de H-comodule à gauche. Notons δ_L le coproduit extérieur. En composant δ_L on construit un morphisme Π_W de H^*-modules algèbres :

$$\Pi_W : B \xrightarrow{\delta_L} H\otimes B \longrightarrow B\otimes H \xrightarrow{\rho_W\otimes \mathrm{Id}} \mathrm{End}(W)\otimes H \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\iota_1} \mathrm{End}(W)\otimes\mathcal{H}(H).$$

On définit alors un sous-ensemble B'' de $\mathrm{End}(W)\otimes\mathcal{H}(H)$ par :

$$B'' = \{x \in \mathrm{End}(W)\otimes\iota_2(H^*) \mid xy = yx \ \forall y \in \Pi_W(B)\}.$$

Grâce à l'inclusion ι_2 on voit encore B'' comme un sous ensemble de $\mathrm{End}(W)\otimes H^*$.
En utilisant la structure de H-module algèbre de H^*, on montre facilement que B'' est

un H-module algèbre. Le produit extérieur est donné pour $f \otimes \alpha \in \mathrm{End}(W) \otimes H^*$ et $h \in H$ par :

$$h.(f \otimes \alpha) = f \otimes (h \rightharpoonup \alpha).$$

De même que pour le stabilisateur on associe à W un B''-module, noté W''. En tant qu'espace vectoriel W'' est isomorphe à W. La structure de B''-module est celle provenant du morphisme d'algèbres $\mathrm{Id} \otimes \varepsilon : \mathrm{End}(W) \otimes H^* \to \mathrm{End}(W)$ restreint à B''. Le couple (B'', W'') est appelé stabilisateur du B-module W.

On peut maintenant donner le théorème permettant de retrouver le H-module algèbre A et le A-module V, à partir du stabilisateur (A', V') :

Théorème 2.1 *Soient A un H-module algèbre semisimple, V un A-module transitif, et (A', V') son stabilisateur.*
Notons (A'', V'') le stabilisateur du A'-module V', et ρ_V, $\rho_{V''}$ les morphismes d'algèbres associés au A-module V et au A''-module V''.
Alors A'' est isomorphe à A en tant que H-modules algèbres, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\simeq} & A'' \\ {\scriptstyle \rho_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{V''}} \\ \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathrm{End}(V'') \end{array}.$$

2.2 Preuve du théorème.

L'outil principal de la preuve est le théorème de Sweedler concernant les H-modules de Hopf. Rappelons qu'un H-module de Hopf à droite M est un H^*-module et un H-module à droite, dont les produits sont compatibles.
C'est-à-dire pour tout $h \in H$, $\alpha \in H^*$ et $m \in M$ on a :

$$\alpha.(m.h) = \sum (\alpha_{(1)}.v).(\alpha_{(2)} \rightharpoonup h).$$

On a alors le résultat de M.E. Sweedler [4] :

Théorème 2.2 *Soient M un H-module de Hopf à droite et*

$$M^{H^*} = \{m \in M \mid \forall \alpha\, \mathrm{H}^* \;\; \alpha.m = \varepsilon(\alpha)m\}$$

l'espace des invariants à gauche de M.
Alors le morphisme

$$\begin{array}{rcl} M^{H^*} \otimes H & \longrightarrow & M \\ m \otimes h & \longmapsto & m.h, \end{array}$$

est un isomorphisme de H-modules de Hopf à droite.

Le théorème se montre en quatre parties.

1) On munit $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ d'une structure de H^*-module de Hopf à droite.

2) On montre que $A' = \mathcal{C}(\Pi_V(A))^H$, où $\mathcal{C}(\Pi_V(A))$ est le centralisateur de $\Pi_V(A)$ dans $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$.

3) On montre que $A'' = \mathcal{C}^2(\Pi_V(A)) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\Pi_V(A)))$.

4) Conclusion.

2.2.1 $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ est un H^*-module de Hopf à droite.

On commence par munir $\mathrm{End}(H)$ d'une structure de H^*-module de Hopf à droite. Puis on étend cette structure à $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$.
Pour tout $h \in H$, on note $\varphi_R(h)$ l'élément de $\mathrm{End}(H)$ défini par le produit à droite par h.
De même, pour tout $\alpha \in H^*$, on note $\varphi_R(\alpha)$ l'élément de $\mathrm{End}(H)$ défini pour tout $h \in H$ par $\varphi_R(\alpha)(h) = h \leftharpoonup \alpha$.
En utilisant l'isomorphisme d'algèbres Ψ associé au morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(H) & \longrightarrow & \mathrm{End}(H) \\ h \otimes \alpha & \longmapsto & (h' \longmapsto h(\alpha \leftharpoonup h')) \end{array}$$

on étend les applications φ_R à $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$.
Les applications obtenues, notées $\overline{\varphi}_R$, sont définies par :

$$\overline{\varphi}_R : H \xrightarrow{\varphi_R} \mathrm{End}(H) \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathcal{H}(H) \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{Id}} \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$$
$$\overline{\varphi}_R : H^* \xrightarrow{\varphi_R} \mathrm{End}(H) \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathcal{H}(H) \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{Id}} \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$$

où le morphisme $1 \otimes \mathrm{Id}$ est défini pour tout $h \otimes \alpha \in \mathcal{H}(H)$ par :

$$(1 \otimes \mathrm{Id})(h \otimes \alpha) = \mathrm{Id}_V \otimes (h \otimes \alpha).$$

On a alors

Lemme 2.1 *L'algèbre* $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ *est un* H^**-module de Hopf à droite.*
Le produit à gauche est défini pour tout $h \in H$ *et* $T \in \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ *par :*

$$h.T = \sum \overline{\varphi}_R\left(S(h_{(2)})\right) T \overline{\varphi}_R\left(h_{(1)}\right).$$

Le produit à droite est défini pour tout $\alpha \in H^*$ *et* $T \in \mathrm{End}(H) \otimes \mathcal{H}(H)$ *par :*

$$T.\alpha = \overline{\varphi}_R(\alpha)T.$$

Le lemme se montre en prouvant que les structures obtenues en remplaçant $\overline{\varphi}_R$ par φ_R font de $\mathrm{End}(H)$ un H^*-module de Hopf à droite. Il est ensuite facile de voir que cette structure passe à $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$.

2.2.2 $\mathbf{A'}$ est égal à $\mathcal{C}(\mathbf{\Pi_V(A)})^{\mathbf{H}}$.

Il est facile de voir que le centralisateur $\mathcal{C}(\Pi_V(A))$ de $\Pi_V(A)$ est un sous H^*-module de Hopf à droite de $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$. On peut donc considérer $\mathcal{C}(\Pi_V(A))^H$.

Lemme 2.2 *L'espace des invariants à gauche $\mathcal{C}(\Pi_V(A))^H$ est égal à A'.*

Preuve: Par définition de A' on a :

$$A' = \mathcal{C}(\Pi_V(A)) \cap \mathrm{End}(V) \otimes \iota_1(H).$$

De plus, $\mathcal{C}(\Pi_V(A))^H = \mathcal{C}(\Pi_V(A)) \cap (\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H))^H$.
Donc il suffit de montrer que $(\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H))^H = \mathrm{End}(V) \otimes \iota_1(H)$.
Il est facile de voir que $\mathrm{End}(V) \otimes \iota_1(H) \subset (\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H))^H$.
D'après le théorème de Sweedler on a

$$(\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H))^H \otimes H^* \simeq \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H).$$

Donc $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H))^H$ et $\mathrm{End}(V) \otimes \iota_1(H) = \mathrm{End}(V) \otimes H \otimes \{1_{H^*}\}$ ont la même dimension. D'où l'égalité voulue. □

De plus comme $\mathcal{C}(\Pi_V(A))$ est un sous H^*-module de Hopf à droite, on peut lui appliquer le théorème de Sweedler, on a alors :

$$\mathcal{C}(\Pi_V(A))^H \otimes H^* \simeq \mathcal{C}(\Pi_V(A)).$$

C'est-à-dire avec la structure de H^*-module à droite de $\mathcal{C}(\Pi_V(A))$ et le lemme précédent :

Lemme 2.3 *On a l'égalité :*

$$\mathcal{C}(\Pi_V(A)) = \overline{\varphi}_R(H^*)A'.$$

2.2.3 A'' est égal au double centralisateur de $\Pi_V(A)$.

Il est facile de voir que $\Pi_{V'}$ restreint à A' est l'identité. On a donc $\Pi_{V'}(A') = A'$.
D'où par définition de A'' on a :

$$\begin{aligned} A'' &= \{x \in \mathrm{End}(V) \otimes \iota_2(H^*) \mid xy = yx \ \forall y \in \Pi_{V'}(A')\} \\ &= \{x \in \mathrm{End}(V) \otimes \iota_2(H^*) \mid xy = yx \ \forall y \in A'\} \\ &= \mathcal{C}(A') \cap \mathrm{End}(V) \otimes \iota_2(H^*) \end{aligned} .$$

De plus grâce au lemme 2.3 :

$$\mathcal{C}^2(\Pi_V(A)) = \mathcal{C}(\overline{\varphi}_R(H^*)) \cap \mathcal{C}(A').$$

If faut donc montrer que $\mathcal{C}(\overline{\varphi}_R(H^*)) = \mathrm{End}(V) \otimes \iota_2(H^*)$.
Pour cela, on commence par vérifier que dans $\mathrm{End}(H)$, on a $\mathcal{C}(\varphi_R(H^*)) = \varphi_L(H^*)$, où

pour tout $\alpha \in H^*$ et $h \in H$, on a posé $\varphi_R(\alpha)(h) = h \leftharpoonup \alpha$, et $\varphi_L(\alpha)(h) = \alpha \rightharpoonup h$.
On montre alors que

$$\mathcal{C}(\overline{\varphi}_R(H^*)) = \mathrm{End}(V) \otimes \{1_H\} \otimes H^*.$$

D'où

Lemme 2.4 *Les algèbres A'' et $\mathcal{C}^2(\Pi_V(A))$ sont égales.*

2.2.4 Fin de la preuve.

Pour finir la preuve, on a besoin du théorème du bicommutant :

Théorème 2.3 *Soient A une algèbre simple de dimension finie, $B \subset A$ une algèbre semisimple. Alors $\mathcal{C}^2(B) = B$ et $\mathcal{C}(B)$ est semisimple.*

On peut trouver une preuve dans [1].
Dans notre situation H est de dimension finie et $\mathcal{H}(H) \simeq \mathrm{End}(H)$ en tant qu'algèbres.
Donc $\mathcal{H}(H)$ est une algèbre simple.
L'espace V est aussi de dimension finie donc $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H)$ est une algèbre simple.
Par transitivité A est isomorphe à $\Pi_V(A)$ en tant que H-modules algèbres. De plus par hypothèse A est semisimple, donc $\Pi_V(A)$ est semisimple.
D'où par le théorème du bicommutant $\mathcal{C}^2(\Pi_V(A)) = \Pi_V(A)$.
Donc par le lemme 2.4 $A'' = \Pi_V(A)$.
Ainsi A est isomorphe à A'' en tant que H-modules algèbres.
Par construction les espaces vectoriels V et V'' sont égaux. On vérifie ensuite facilement que les structures de A-module et A''-module sont compatibles au sens du théorème.

3 Dimension du stabilisateur.

Nous allons établir une formule donnant la dimension du stabilisateur. Cette formule nécessite une définition globale d'un H-module algèbre transitif.

3.1 Définition globale de transitif.

Rappelons qu'un module idéal d'un H-module algèbre est un sous H-module qui est aussi un idéal bilatère. La définition de transitif que nous allons donner est globale dans le sens où, elle ne tient pas compte d'un A-module.

Définition 3.1 *Soit A un H-module algèbre.*
On dit que A est transitif si et seulement si

i) l'espace des invariants à gauche A^H vaut $k1_A$, c'est-à-dire

$$A^H = \{a \in A \mid ha = \varepsilon(h)a \ \forall\, h \in H\} = k1_A,$$

ii) A n'a pas de module idéal propre.

Soit V un A-module. Comme le noyau de Π_V est un module idéal différent de A, on a immédiatement l'implication :

A est un H-module algèbre transitif $\Rightarrow$ tous les A-modules sont transitifs.

Contrairement à la définition locale cette définition est équivalente, dans le cas des groupes, à une action de groupe transitive.

Proposition 3.1 *Soit S un G-ensemble. L'action de G sur S est transitive si et seulement $\mathcal{F}(S)$ est un $k[G]$-module algèbre transitif.*

Preuve: Soit S un G-ensemble transitif. Il est facile de voir que $\mathcal{F}(S)^{k[G]} = k1_{k[G]}$. Donc la première condition est vérifiée.
Pour la seconde condition, on considère un module idéal I de $\mathcal{F}(S)$ différent de $\{0\}$. Il existe alors une fonction non nulle. En décomposant cette fonction dans la base canonique de $\mathcal{F}(S)$, on montre que tous les éléments de cette base sont dans I. D'où $I = \mathcal{F}(S)$ et la seconde condition est vérifiée.

Réciproquement soit S un G-ensemble tel que $\mathcal{F}(S)$ est un $k[G]$-module algèbre transitif.
On note $(\delta_i)_{i\in S}$ la base canonique de $\mathcal{F}(S)$, et p un point de S.
On pose $I = \{g.\delta_p,\ g \in k[G]\}$.
On montre facilement que I est un module idéal de $\mathcal{F}(S)$ différent du module idéal trivial. Donc d'après la seconde condition $I = \mathcal{F}(S)$.
On conclut ensuite qu'il y a qu'une orbite pour l'action de G. $\square$

On peut remarquer que pour prouver la réciproque on a utilisé que la seconde condition. Donc dans le cas d'un $k[G]$-module algèbre provenant d'un G-ensemble on a :

$$A \text{ n'a pas de module idéal propre} \Rightarrow A^H = k1_A$$

Cette remarque est fausse en générale.

3.2 Une formule de divisibilité pour les dimensions.

Afin de donner la dimension du stabilisateur, on commence par donner une formule de divisibilité entre la dimension de H, celle d'un H-module algèbre A, et de A-modules irréductibles.

Théorème 3.1 *Soient H une algèbre de Hopf semisimple, A un H-module algèbre transitif et V_i, V_j des A-modules irréductibles.*
Alors

$$\dim(A) \mid \dim(V_i)\dim(V_j)\dim(H).$$

La preuve de ce théorème utilise la théorie des algèbres de Hopf semisimple de dimension finie. On commence donc par rappeler quelques résultats utilisés dans la suite. On peut trouver les preuves de ces énoncés dans [2] et [3].

3.2.1 Rappel sur les algèbres de Hopf semisimple.

Comme le corps k est de caractéristique zéro, on a $S^2 = \mathrm{Id}$.
On note $\int_H^l$ l'espace des intégrales à gauche de H. C'est-à-dire

$$\int_H^l = \{x \in H \mid hx = \varepsilon(h)x \ \forall\, h \in H\}.$$

Comme H est de dimension finie on a $\dim\left(\int_H^l\right) = 1$.
Notons pour tout $\alpha \in H^*$, $\varphi_L(\alpha)$ l'élément de $\mathrm{End}(H^*)$ défini par la multiplication à gauche par α.
Alors l'élément Λ de $H \simeq H^{**}$ défini par

$$\alpha(\Lambda) = \mathrm{Tr}(\varphi_L(\alpha)),\ \forall \alpha \in H^*,$$

est un intégral à gauche, et on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\Delta(\Lambda) = \Delta^{op}(\Lambda)\\
&\sum \Lambda_{(1)}h \otimes \Lambda_{(2)} = \sum \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}S(h), \qquad \forall\, h \in H\\
&\varepsilon(\Lambda) = \dim(H).
\end{aligned}$$

De plus comme H est semisimple, on a $\int_H^l = \int_H^r$, donc Λ est aussi un intégral à droite.

Le théorème se démontre en plusieurs étapes.

1) On définit une forme bilinéaire sur A.

2) On donne une formule pour l'action des caractères de H^* sur le centre de A.

3) On termine la preuve en appliquant la formule précédente à un H^*-module de caractère Λ.

3.2.2 Définition et propriété d'une forme bilinéaire sur A.

D'après les propriétés de Λ on a pour tout $a \in A$: $\Lambda.a \in A^H$.
Donc par transitivité de A : $\Lambda.a \in k1_A$.
On définit alors une forme bilinéaire $(\ ,\ )$ sur A par $(a, b) = \Lambda.(ab)$.

Lemme 3.1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.1, la forme bilinéaire* $(\ ,\ )$ *est symétrique, non dégénérée et elle vérifie pour tout* $a, b, c \in A$ *et* $h \in H$:

$$(ab, c) = (a, bc), \qquad (h.a, b) = (a, S(h).b).$$

Preuve: La première égalité est immédiate. La symétrie et la deuxième égalité proviennent des égalités vérifiées par Λ.
En utilisant la deuxième égalité on montre que le noyau de la forme est un module idéal. Comme il est différent de A on a la non dégénérescence. □

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.1, l'algèbre A est semisimple et pour tout $a, b \in A$ on a :*

$$(a, b) = \frac{\dim(H)}{\dim(A)} \operatorname{Tr}(\varphi_L(ab)),$$

où $\varphi_L(ab)$ est l'élément de $\operatorname{End}(A)$ défini par la multiplication à gauche par ab.

Preuve: Comme la forme bilinéaire est symétrique non dégénérée, il existe une base orthonormale $(a_i)_{i\in I}$ de A.
En utilisant la structure de module algèbre, la dernière égalité du lemme 3.1, et $S^2 = \operatorname{Id}$ on a alors pour tout $h \in H$:

$$h.\sum_i a_i^2 = \varepsilon(h)\sum_i a_i^2.$$

D'où par transitivité de A, il existe $c \in k$ tel que $\sum_i a_i^2 = c1_A$.
De plus pour tout élément a_i de la base orthonormale, et tout $a, b \in A$:

$$(ab)a_i = \sum_j ((ab)a_i, a_j)a_j.$$

Donc $\operatorname{Tr}(\varphi_L(ab)) = \sum_i \Lambda aba_i^2 = c(a, b)$.
On montre alors l'égalité du lemme en considérant le cas $a = b = 1_A$, et en utilisant $\varepsilon(\Lambda) = \dim(H)$.
Pour voir la semi-simplicité de A, on va montrer que tous les idéaux nilpotents sont nuls. Soient un I idéal nilpotent de A et $x \in I$. Comme I est nilpotent on a pour tout $a \in A$ $\operatorname{Tr}(\varphi_L(ax))$.
On conclut en utilisant la formule du lemme et la non dégénéréscence de la forme bilinéaire. □

3.2.3 Action des caractères de H^* sur le centre de A.

Afin de trouver une formule entre les dimensions, on a besoin des caractères de H. Rappelons que si M est H-module, le caractère de M est l'élément de H^* défini pour tout $h \in H$ par $\chi_M(h) = \operatorname{Tr}_M(\varphi_L(h))$.
L'ensemble des caractères de H est noté $\operatorname{Ch}(H)$.

Lemme 3.3 *Soit A un module algèbre irréductible d'une algèbre de Hopf H semisimple. Alors l'action de $Ch(H^*)$ sur le centre de A reste dans le centre de A. C'est-à-dire :*

$$Ch(H^*).Z(A) \subset Z(A).$$

Preuve: Soient $a \in Z(A)$, $b \in A$ et $h \in Ch(H^*)$.
On a alors $\sum S(h_{(1)}) \otimes (S(h_{(2)}).b)a = \sum S(h_{(1)}) \otimes a(S(h_{(2)}).b)$.
Le lemme se montre alors en évaluant le produit du H-module A sur cette égalité, et en utilisant l'égalité $S^2 = \mathrm{Id}$ et $\Delta(h) = \Delta^{op}(h)$ (car $h \in \mathrm{Ch}(H^*)$). □

Comme A est semisimple on a la décomposition $A \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathrm{End}(V_i)$, où $\{V_i\}_{i\in I}$ est la famille des modules irréductibles de A.
De plus le centre de A admet une base d'idempotents centraux $(e_i)_{i\in I}$.
Les éléments de cette base sont obtenus par l'image réciproque des endomorphismes Id_{V_i} par l'isomorphisme de décomposition de A. Ces éléments vérifient $\sum_{i\in I} e_i = 1_A$.

A partir d'un A-module V et d'un H^*-module M, on peut munir $V \otimes M$ d'une structure de A-module.
En effet A est un H-module donc un H^*-comodule à droite. En composant le coproduit extérieur par les morphismes d'algèbres du A-module de V et du H^*-module de M on obtient un morphisme d'algèbres de A à valeurs dans $\mathrm{End}(V \otimes M)$.
On a alors muni $V \otimes M$ d'une structure de A-module.
Fixons un A-module irréductible V_l, et un H^*-module M.
La construction précédente s'applique à V_l et à M. Le A-module $V_l \otimes M$ se décompose alors en somme directe de A-modules irréductibles :

$$V_l \otimes M = \bigoplus_{i\in I} N^i_{M,l} V_i,$$

où $N^i_{M,l}$ est la multiplicité du A-module irréductible V_i dans la décomposition de $V_l \otimes M$.
On a alors :

Lemme 3.4 *Soient M un H^*-module, et V_l un A-module irréductible. Alors*

$$\chi_M \cdot \left(\frac{e_l}{\dim(V_l)}\right) = \sum_{i\in I} N^l_{M,i} \frac{e_i}{\dim(V_i)}.$$

Preuve: La famille $\left(\frac{e_i}{\dim(v_i)}\right)_{i\in I}$ est encore une base de $Z(A)$. Donc par le lemme 3.3 il existe une famille de coefficients $(c_i)_{i\in I}$ tels que :

$$\chi_M \cdot \left(\frac{e_l}{\dim(V_l)}\right) = \sum_{i\in I} c_i \frac{e_i}{\dim(V_i)}.$$

Soit V_k un A-module irréductible.
Pour déterminer les c_i on va calculer de deux façons $\mathrm{Tr}\big|_{V_k\otimes M}\left(\frac{\varphi_L(e_l)}{\dim(V_l)}\right)$.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big|_{V_k\otimes M}\left(\tfrac{\varphi_L(e_l)}{\dim(V_l)}\right) &= \sum \frac{1}{\dim(V_l)}\,\mathrm{Tr}\big|_{V_k}(\varphi_L(e_{l(0)}))\,\mathrm{Tr}\big|_M(\varphi_L(e_{l(1)}))\\
&= \sum \frac{1}{\dim(V_l)}\,\mathrm{Tr}\big|_{V_k}(\varphi_L(\chi_M(e_{l(1)})e_{l(0)}))\\
&= \frac{1}{\dim(V_l)}\,\mathrm{Tr}\big|_{V_k}(\varphi_L(\chi_M.e_l))\\
&= \sum_{i\in I} \frac{c_i}{\dim(V_i)}\,\mathrm{Tr}\big|_{V_k}(\varphi_L(e_i))
\end{aligned}$$

Or par construction des idempotents $(e_i)_{i\in I}$, on a

$$\mathrm{Tr}\big|_{V_k}(\varphi_L(e_i)) = \begin{cases} \dim(V_k) & \text{si } k=i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc $\mathrm{Tr}\big|_{V_k\otimes M}\left(\tfrac{\varphi_L(e_l)}{\dim(V_l)}\right) = c_k$.
D'un autre coté, on a

$$\mathrm{Tr}\big|_{V_k\otimes M}\left(\frac{\varphi_L(e_l)}{\dim(V_l)}\right) = \sum_{i\in I} N^i_{M,k}\,\mathrm{Tr}\big|_{V_i}\left(\frac{\varphi_L(e_l)}{\dim(V_l)}\right) = N^l_{M,k}$$

□

On considère maintenant ce lemme dans le cas particulier du H^*-module H^*. Le caractère de ce module est Λ. Donc on a :

$$\Lambda.\left(\frac{e_l}{\dim(V_l)}\right) = \sum_{i\in I} N^l_i \frac{e_i}{\dim(V_i)},$$

où $V_l\otimes H^* = \bigoplus_{i\in I} N^i_l V_i$.
En utilisant le lemme 3.2 et les propriétés de la base $(e_i)_{i\in I}$ on a :

$$\begin{aligned}
\Lambda.\left(\frac{e_l}{\dim(V_l)}\right) &= \tfrac{\dim(H)}{\dim(V_l)\dim(A)}\,\mathrm{Tr}\big|_A(\varphi_L(e_l))\\
&= \sum_{i\in I} \frac{\dim(H)}{\dim(V_l)\dim(A)}\,\mathrm{Tr}\big|_{\mathrm{End}(V_i)}(\varphi_L(\mathrm{Id}_{V_l}))\\
&= \frac{\dim(H)\dim(V_l)}{\dim(A)} 1_A = \frac{\dim(H)\dim(V_l)}{\dim(A)} \sum_{i\in I} e_i
\end{aligned}$$

D'où pour tout A-modules irréductibles V_k et V_l :

$$\dim(H)\dim(V_l)\dim(V_k) = \dim(A) N^l_k.$$

On a donc montré le théorème.

3.3 Application au calcul de la dimension du stabilisateur.

On peut maintenant déterminer la dimension du stabilisateur :

Corollaire 3.1 *Soient H une algèbre de Hopf semisimple, A un H-module algèbre transitif, V un A-module irréductible, et (A', V') le stabilisateur de V.*
Alors :

$$\dim(A') = \frac{\dim(V)^2 \dim(H)}{\dim(A)}.$$

Preuve: En utilisant la structure de H^*-module de H, on munit l'espace $V \otimes H$ d'une structure de A-module (cf la preuve du théorème).
De plus H est isomorphe à H^* en tant que H^*-modules. Donc $V \otimes H^*$ est isomorphe à $V \otimes H$ en tant que A-modules.
Notons $V \otimes H \simeq \bigoplus_{i \in I} N_V^i V_i$ la décomposition de $V \otimes H$ en A-modules irréductibles. En appliquant le théorème précédent on a pour tout $i \in I$ l'égalité :

$$N_V^i = \frac{\dim(H)\dim(V)\dim(V_i)}{\dim(A)}.$$

On montre ensuite que $\mathcal{C}(\Pi_V(A))$ est isomorphe à l'algèbre $\mathrm{End}_A(V \otimes H)$.
L'isomorphisme provient de l'isomorphisme d'algèbres $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{H}(H) \simeq \mathrm{End}(V \otimes H)$.
On a alors, en utilisant le lemme de Schur [1]:

$$\dim(\mathrm{End}_A(V \otimes H)) = \dim(\mathrm{End}_A(\bigoplus_{i \in I} N_V^i V_i)) = \sum_{i \in I} (N_V^i)^2.$$

D'où d'après l'isomorphisme $A \simeq \oplus_{i \in I} \mathrm{End}(V_i)$:

$$\dim(\mathcal{C}(\Pi_V(A))) = \sum_{i \in I} \left(\frac{\dim(V)\dim(V_i)\dim(H)}{\dim(A)} \right)^2 = \frac{\dim(V)^2 \dim(H)^2}{\dim(A)}.$$

Or $\mathcal{C}(\Pi_V(A)) \simeq A' \otimes H^*$, donc

$$\dim(A') = \frac{\dim(V)^2 \dim(H)}{\dim(A)}.$$

$\square$

4 Lien avec la conjecture de Kaplansky.

Pour finir, nous allons donner un lien avec la conjecture de Kaplansky :

Conjecture 4.1 (Kaplansky) *Soient H une algèbre de Hopf semisimple, et V un H-module irréductible. Alors*

$$\dim(V) \mid \dim(H).$$

Dans son article [6] Y. Zhu propose la conjecture suivante :

Conjecture 4.2 (Zhu) *Soient H une algèbre de Hopf semisimple, A un H-module algèbre transitif, et V un A-module irréductible. Alors*

$$\dim(A) \mid \dim(V) \dim(H).$$

On a la proposition suivante :

Proposition 4.1 *La conjecture de Zhu implique la conjecture de Kaplansky.*

Preuve: On commence par munir $\mathrm{End}(V)$ d'une structure de H-module algèbre. Si ρ_V désigne la structure de H-module de V, la structure de H-module est donnée pour tout $h \in H$ et $T \in \mathrm{End}(V)$ par :

$$h.T = \sum \rho_V(h_{(1)}) T \rho_V(S(h_{(2)})).$$

En utilisant le lemme de Schur on montre que si V est un H-module irréductible alors $(\mathrm{End}(V))^H \simeq K\,\mathrm{Id}_V$.
Donc $\mathrm{End}(V)$ est un H-module algèbre transitif (la deuxième condition provient de $\dim(V) < +\infty$.
De plus V est l'unique $\mathrm{End}(V)$-module irréductible, donc d'après la conjecture de Zhu, on a :

$$\dim(\mathrm{End}(V)) \mid \dim(V) \dim(H).$$

C'est-à-dire $\dim(V) \mid \dim(H)$. □

Dans son article Y. Zhu précise que sa conjecture est vraie dans le cas de l'algèbre de groupe, ainsi que dans d'autres cas (non précisés).
De plus, il montre que si sa conjecture est vraie pour le double de Drinfeld $\mathcal{D}(H)$ de H alors elle est vraie pour H.
En effet si A est un H-module algèbre transitif, alors $H \otimes A$ est un $\mathcal{D}(H)$-module algèbre transitif. La structure de $\mathcal{D}(H)$-module est donnée pour tout $h, h' \in H$, $a \in A$ et $\alpha \in H^*$ par :

$$(\alpha \otimes h).(h' \otimes a) = \sum (\alpha \rightharpoonup (h_{(1)} h' S(h_{(3)}))) \otimes h_{(2)}.a$$

De plus si V est un A-module irréductible, alors V est encore un $H \otimes A$-module irréductible (H agit par la counité).
Il est alors clair que la conjecture pour $\mathcal{D}(H)$ implique celle pour H.

Bibliographie

[1] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Representations and invariants of the classical groups.* Cambridge University Press, 1998.

[2] Richard G. Larson and David E. Radford. Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple. *J. Algebra*, 117(2):267–289, 1988.

[3] Richard G. Larson and David E. Radford. Semisimple Hopf algebras. *J. Algebra*, 171(1):5–35, 1995.

[4] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[5] Min Yan and Yongchang Zhu. Stabilizer for Hopf algebra actions. *Comm. Algebra*, 26(12):3885–3898, 1998.

[6] Yongchang Zhu. On Hopf algebra actions. Préprint.