Groupe de Travail Interuniversitaire
en Algèbre (GTIA) Exposé du 18 Juin 2001

Florence Fauquant-Millet

Sur les opérateurs de Casimir dans les algèbres de Lie simples

d'après un article de F. Berdjis,
"A criterion for completeness of Casimir operators",
J. Math. Phys. 22(9), September 1981

1 Introduction

Soit L une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur le corps des complexes et $Z(L)$ le centre de l'algèbre enveloppante universelle $U(L)$ de L. Par définition, les opérateurs de Casimir de L (ou plus précisément les éléments de Casimir de L) sont les éléments de $Z(L)$.

F. Berdjis, dans son article, propose un Critère de "complétude" pour un ensemble d'opérateurs de Casimir de L, ie un critère permettant de savoir si un ensemble d'opérateurs de Casimir est algébriquement libre et engendre l'algèbre $Z(L)$.

Ce Critère de "complétude" est lié à la connaissance d'un système de générateurs pour l'algèbre des invariants par l'action du groupe de Weyl de l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel dual d'une sous-algèbre de Cartan de L. Cette algèbre des invariants est bien connue dans les cas A_l, B_l, C_l ou D_l, par contre elle n'était pas connue pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles avant les travaux de F. Berdjis, cf. [BE1] et [BE2].

Nous expliquerons donc dans cet exposé comment F. Berdjis obtient son Critère de complétude et comment on pourrait également obtenir ce Critère en utilisant l'isomorphisme de Harish-Chandra, que nous rappellerons. Enfin dans un deuxième temps nous expliquerons comment F. Berdjis applique ce Critère de complétude aux algèbres de Lie simples classiques de type A_l, B_l et C_l.

2 Préliminaires - des isomorphismes connus

2.1 Notations

Soit L une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, H une sous-algèbre de Cartan de L ($\dim(H) = l$), $U(L)$

l'algèbre enveloppante universelle de L, $S(L)$ l'algèbre symétrique de L, $S(L^*)$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel dual L^* de L.

Pour bien faire la distinction entre les produits dans les algèbres symétriques et dans les algèbres enveloppantes, on notera par une $*$ le produit dans les algèbres $U(L)$ et $U(H)$ - $U(H)$ étant identifiée avec la sous-algèbre (commutative) de $U(L)$ engendrée par H - alors qu'aucun symbole particulier ne sera utilisé pour le produit dans les algèbres symétriques $S(L)$, $S(L^*)$, $S(H)$ ou $S(H^*)$.

$U(L)$ et $S(L)$ sont des L-modules pour la représentation adjointe de L qui se déduit de la représentation adjointe de L dans L de la façon suivante : pour $x \in L$, $\widetilde{ad\, x}$ est l'unique dérivation de l'algèbre $U(L)$, resp. de l'algèbre $S(L)$, qui prolonge la dérivation $ad\, x$ de l'algèbre de Lie L.

L agit également sur L^* par la représentation coadjointe, ie par la représentation de L dans L^* définie par $x \in L \mapsto {}^t ad\,(-x) \in End(L^*)$ où ${}^t ad\,(-x)$ est la transposée de l'endomorphisme $ad\,(-x)$ de L. Enfin $S(L^*)$ est un L-module pour la représentation coadjointe de L dans $S(L^*)$ qui se déduit de la représentation coadjointe de L dans L^* par $x \in L \mapsto \widetilde{{}^t ad\,(-x)} \in End(S(L^*))$ où $\widetilde{{}^t ad\,(-x)}$ est l'unique dérivation de l'algèbre $S(L^*)$ qui prolonge l'endomorphisme ${}^t ad\,(-x)$ de L^*.

Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $U_k(L)$ le sous-espace vectoriel de $U(L)$ engendré par les produits $y_1 * \ldots * y_p$ où $y_1, \ldots, y_p \in L$ et $p \leq k$. La suite $(U_k(L))_{k \in \mathbb{N}}$ est une filtration (croissante) de $U(L)$ qui s'appelle la filtration canonique de $U(L)$. Si u est un élément non nul de $U(L)$, le plus petit entier k tel que $u \in U_k(L)$ s'appelle la filtration de u : on la notera $\mathcal{F}(u)$.

On définit de façon analogue des filtrations canoniques pour les algèbres $S(L)$ et $S(L^*)$, et on notera également par $\mathcal{F}$ la filtration d'un élément non nul dans ces algèbres filtrées.

A ces filtrations canoniques sont associés des espaces vectoriels gradués, notés gr, qui sont munis de structures d'algèbres. Ces filtrations canoniques sur $U(L)$, $S(L)$ ou $S(L^*)$, sont invariantes par les représentations adjointes (resp. coadjointes) de L dans $U(L)$ ou dans $S(L)$ (resp. de L dans $S(L^*)$), autrement dit, si u est un élément non nul de filtration k de l'une de ces algèbres alors, pour tout $x \in L$, l'élément $x.u$ (en notant $x.u$ l'action de x sur u) est nul ou de même filtration k. Par conséquent ces représentations induisent des représentations de L dans les algèbres graduées associées à ces algèbres filtrées. Rappelons enfin que $gr(U(L))$ et $S(L)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres et en tant que L-modules.

Soit $Z(L)$ le centre de $U(L)$. Les éléments du centre $Z(L)$ sont appelés éléments de Casimir, ou opérateurs de Casimir par abus de langage (car les "opérateurs de Casimir" désignent plutôt des représentations des éléments de Casimir).

Soit $Int(L)$ le groupe adjoint de L, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie L engendré par $exp(ad\,x)$, pour $x \in L$ tel que $ad\,x$ soit nilpotent. Soit

$$S_{Int}(L) := \{s \in S(L);\ \tilde{g}(s) = s,\ \forall g \in Int(L)\}$$

où $\tilde{g}$ est l'unique extension de $g \in Int(L)$ en un automorphisme d'algèbres de $S(L)$.

Remarquons que, si $S(L)^L := \{s \in S(L);\ \widetilde{ad\,x}(s) = 0, \forall x \in L\}$, alors $S(L)^L = S_{Int}(L)$.

Soit $\alpha \in H^*$ et posons $L_\alpha := \{x \in L;\ (ad\,h)(x) = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$. Notons W^* le sous-ensemble (fini) de H^* formé des formes linéaires α non nulles sur H telles que le sous-espace L_α soit non nul. W^* s'appelle l'ensemble des racines de L relativement à H.

D'après [DIX, 1.10.2], $L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in W^*} L_\alpha)$ et $\dim(L_\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in W^*$. De plus, si $\alpha \in W^*$, alors $-\alpha \in W^*$, et pour $\alpha \in W^*$ $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de H et contient un élément H_α et un seul tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Soit $\alpha \in W^*$ et s_α la réflexion associée à α c'est-à-dire l'automorphisme de l'espace vectoriel H^* défini par $s_\alpha(\mu) = \mu - \mu(H_\alpha)\alpha$ pour tout $\mu \in H^*$. On note $Int(W^*, H)$ le groupe de Weyl de (L, H), c'est-à-dire le sous-groupe des automorphismes de H^* engendré par les réflexions s_α pour $\alpha \in W^*$. Le groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ est fini et agit non seulement sur H^* mais aussi sur H par transport de structure de la façon suivante : $s_\alpha(h) = h - \alpha(h)H_\alpha$ pour tout $h \in H$. La notation $Int(W^*, H)$ peut alors se justifier par le fait que pour tout élément w du groupe de Weyl (opérant sur H) il existe $\theta \in Int(L)$ tel que $\theta_{|H} = w$ (cf. [DIX, 1.10.19]).

On note $S_{Int}(H^*)$ l'algèbre des invariants de $S(H^*)$ sous l'action du groupe de Weyl $Int(W^*, H)$, c'est-à-dire

$$S_{Int}(H^*) := \{s \in S(H^*);\ \tilde{w}(s) = s,\ \forall w \in Int(W^*, H)\}$$

où $\tilde{w}$ est l'unique extension de w (opérant sur H^*) en un automorphisme d'algèbres de $S(H^*)$.

Soit $P(L)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur L, c'est-à-dire $P(L) = S(L^*)$ et

$$P_{Int}(L) := \{p \in P(L);\ p \circ g = p,\ \forall g \in Int(L)\}.$$

Remarque: Posons $S(L^*)^L := \{p \in S(L^*);\ \widetilde{{}^t ad\,(-x)}(p) = 0, \forall x \in L\}$. D'après [DIX, 7.3.1], $P_{Int}(L) = S(L^*)^L$.

2.2 Un isomorphisme d'espaces vectoriels

Soit l'application linéaire $\lambda : S(L) \longrightarrow U(L)$ définie par $\lambda(1_{S(L)}) = 1_{U(L)}$ et $\lambda(y_1 y_2 \ldots y_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} y_{\sigma(1)} * y_{\sigma(2)} * \ldots * y_{\sigma(p)}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, S_p est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, p\}$ et $y_j \in L$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

D'après [CHE2, Chap V, § 6, n ° 2, Prop. 2 et 3] ou [DIX, 2.4.11], λ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et on a

$$\lambda(S_{Int}(L)) = Z(L)$$

car λ est un isomorphisme de L-modules. Attention ! λ n'est pas un morphisme d'algèbres : en effet $\lambda(y_1 y_2) = y_1 * y_2 + \frac{1}{2}[y_2, y_1]$ pour $y_1, y_2 \in L$ et de façon générale, pour $s_1, s_2 \in S(L)$,

$$\lambda(s_1 s_2) = \lambda(s_1) * \lambda(s_2) + \lambda(s) \tag{1}$$

où $s \in S(L)$ est tel que $s = 0$ ou $\mathcal{F}(s) < \mathcal{F}(s_1) + \mathcal{F}(s_2)$.

Enfin même $\lambda \mid S_{Int}(L)$ n'est pas un isomorphisme d'algèbres de $S_{Int}(L)$ sur $Z(L)$.

2.3 Des isomorphismes d'algèbres

2.3.1

Soit $R : P(L) \longrightarrow P(H) = S(H^*)$ telle que $R(p) = p_{|H}$, l'homomorphisme de restriction à H.

D'après [DIX, 7.3.1 et 7.3.5], $R \mid P_{Int}(L)$ est un isomorphisme de l'algèbre $P_{Int}(L)$ sur l'algèbre $S_{Int}(H^*)$.

2.3.2

Soit $K(\,.\,,\,.\,)$ la forme de Killing de L, ie $K(x, y) := tr(ad\, x \circ ad\, y)$ pour tous $x, y \in L$. Posons $\tilde{\delta} : L \longrightarrow L^*$ l'application linéaire telle que $\tilde{\delta}(x) := K(x,\,.\,)$ où, pour $x \in L$, $K(x,\,.\,) \in L^*$ est définie par $K(x,\,.\,)(y) := K(x, y)$ pour tout $y \in L$. Comme L est semi-simple, la forme bilinéaire symétrique $K(\,.\,,\,.\,)$ est non dégénérée, donc $\tilde{\delta}$ est bijective.

Soit $\delta : S(L) \longrightarrow P(L)$ l'unique extension en un isomorphisme d'algèbres de l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\tilde{\delta}$.

Puisque $K(x, [y, z]) = K([x, y], z)$ pour tous $x, y, z \in L$, on vérifie que, pour $x, y \in L$ tels que $ad\, y$ est nilpotent, on a

$$K(x,\,.\,) \circ exp(ad\, y) = K((exp(-ad\, y))(x),\,.\,).$$

D'où l'on en déduit que

$$\delta(S_{Int}(L)) = P_{Int}(L).$$

Finalement, on a donc les isomorphismes d'algèbres ci-dessous

$$\begin{tikzcd} P_{Int}(L) \arrow[r, "R"] & S_{Int}(H^*) \\ S_{Int}(L) \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Par conséquent, les algèbres $S_{Int}(L)$ et $S_{Int}(H^*)$ sont isomorphes, les éléments homogènes de l'une ayant pour image des éléments homogènes de l'autre. Or, d'après un Théorème de Chevalley (cf. [CHE1]), comme $Int(W^*, H)$ est un groupe fini de réflexions opérant sur un espace vectoriel complexe de dimension l, il existe des éléments homogènes $f_1, \ldots, f_l$ de $S_{Int}(H^*)$ algébriquement indépendants qui engendrent (avec l'unité) l'algèbre $S_{Int}(H^*)$. On en déduit que $S_{Int}(L)$ est également engendré par l'unité et un ensemble de l éléments homogènes algébriquement indépendants.

Pour passer à $Z(L)$, rappelons que les algèbres $S_{Int}(L)$ et $Z(L)$ ne sont isomorphes qu'en tant qu'espaces vectoriels donc on ne peut pas conclure immédiatement quant à l'existence pour $Z(L)$ d'un système de générateurs constitué de l éléments algébriquement indépendants.

Cependant, grâce au Lemme 1 ci-dessous, il découle que $Z(L)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en l indéterminées, résultat que l'on trouve également dans [DIX, 7.3.8].

Lemme 1 : *Soit* $\{s_1, \ldots, s_l\}$ *un sous-ensemble de* $S_{Int}(L)$. *Alors* $\{s_1, \ldots, s_l\}$ *engendre (avec l'unité) l'algèbre* $S_{Int}(L)$ *si et seulement si* $\{\lambda(s_1), \ldots, \lambda(s_l)\}$ *engendre (avec l'unité) l'algèbre* $Z(L)$. *De plus, si* $\{s_1, \ldots, s_l\}$ *est un ensemble d'éléments homogènes et algébriquement indépendants de* $S_{Int}(L)$, *alors* $\{\lambda(s_1), \ldots, \lambda(s_l)\}$ *est un ensemble d'éléments algébriquement indépendants de* $Z(L)$.

Preuve. Découle de (1) et d'une récurrence sur la filtration d'un élément de $Z(L)$ ou de $S_{Int}(L)$. Pour plus de détails, voir [BE1].

3 Un Critère de complétude pour les opérateurs de Casimir

Posons $Z^+(L) := Z(L) \cap U^+(L)$ où $U^+(L)$ est l'idéal de $U(L)$ engendré par L. Alors $Z^+(L)$ est un idéal de $Z(L)$.

Proposition (Critère de complétude): *Soit L une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$, H une sous-algèbre de Cartan de L de dimension l et W^* l'ensemble des racines de L relativement à H. On a* $L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in W^*} L_\alpha)$ *où L_α est l'espace associé à la racine α. Soit* $\mathcal{B} = \{h_i, b_\alpha \mid h_i \in H, 1 \leq i \leq l, b_\alpha \in L_\alpha, \alpha \in W^*\}$ *une base de L. Soit* $\{z_1, \ldots, z_l\}$ *une partie de* $Z^+(L)\backslash\{0\}$ *telle que* $z_i = h_{z_i} + b_{z_i}$, $1 \leq i \leq l$, *avec* $h_{z_i} \in U(H)\backslash\{0\}$, $\mathcal{F}(h_{z_i}) = \mathcal{F}(z_i)$ *et b_{z_i} est une somme de monômes u en les éléments de la base $\mathcal{B}$ tels que, si* $u \neq 0$, $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(z_i)$ *et, lorsque* $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(z_i)$, *au moins un facteur de u est un élément de* $\{b_\alpha, \alpha \in W^*\}$ *et tels que* $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}), 1 \leq i \leq l\}$ *est un sous-ensemble d'éléments homogènes de* $S_{Int}(H^*)$ *qui, avec l'unité, engendre l'algèbre* $S_{Int}(H^*)$. *Alors* $\{z_1, \ldots, z_l\}$ *est un ensemble d'éléments algébriquement indépendants qui engendre l'idéal*

$Z^+(L)$ de $Z(L)$, autrement dit $\{1_{U(L)}, z_1, \ldots, z_l\}$ engendre l'algèbre $Z(L)$. (On dira que $\{z_1, \ldots, z_l\}$ est un ensemble "complet" de $Z^+(L)$).

Preuve. Donnons une idée de la preuve de F. Berdjis. On montre d'abord, en exprimant $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_i})$, pour $1 \leq i \leq l$, comme des polynômes en les $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(z_i)$, que $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(z_i),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble de $S_{Int}(H^*)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $S_{Int}(H^*)$. Par conséquent, compte tenu des isomorphismes d'algèbres rappelés plus haut, $\{(\delta \circ \lambda^{-1})(z_i),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble de $P_{Int}(L)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $P_{Int}(L)$ puis $\{\lambda^{-1}(z_i),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble de $S_{Int}(L)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $S_{Int}(L)$ et enfin, d'après le Lemme 1, $\{z_i,\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble de $Z(L)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $Z(L)$ (donc est un ensemble algébriquement libre, puisque $Z(L)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en l indéterminées). Pour plus de détails sur cette preuve, voir [BE1].

Remarquons que ce Critère de complétude peut également se démontrer à partir de l'isomorphisme de Harish-Chandra. Détaillons un peu.

Soit $U(L)_0$ le sous-espace vectoriel de $U(L)$ formé des vecteurs $u \in U(L)$ tels que $\widetilde{ad\, h}(u) = 0$ pour tout $h \in H$. D'après [DIX, 7.4.2], on a

$$U(L)_0 = U(H) \oplus J$$

où $J := N^- U(L) \cap U(L)_0 = U(L) N^+ \cap U(L)_0$ est un idéal bilatère de $U(L)_0$.

(Ici $N^- := \oplus_{\alpha \in W^{*-}} L_\alpha$ et $N^+ := \oplus_{\alpha \in W^{*+}} L_\alpha$ avec W^{*-}, resp. W^{*+} qui désigne resp. les racines négatives, resp. positives de W^* relativement à une base de racines simples π de W^*.) Comme J est un idéal bilatère de $U(L)_0$, le projecteur φ de $U(L)_0$ sur $U(H)$ de noyau J est un homomorphisme d'algèbres (appelé l'homomorphisme de Harish-Chandra de $U(L)_0$ sur $U(H)$ relatif à la base de racines simples π).

Rappelons que le groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ agit également sur H. Notons encore $\tilde{w}$ l'unique extension de $w \in Int(W^*, H)$ (w opérant sur H) en un automorphisme d'algèbres de $U(H)$. On définit alors $U_{Int}(H)$ comme l'algèbre des invariants de $U(H)$ sous l'action du groupe de Weyl $Int(W^*, H)$, c'est-à-dire

$$U_{Int}(H) := \{u \in U(H);\ \tilde{w}(u) = u,\ \forall w \in Int(W^*, H)\}$$

et on a le Théorème suivant.

Théorème (isomorphisme de Harish-Chandra - version graduée): *On reprend les notations précédentes. Soit φ l'homomorphisme de Harish-Chandra de $U(L)_0$ sur $U(H)$ relatif à la base de racines simples π et $\tilde{\varphi}$ sa restriction à $Z(L)$.*

1) La filtration de $Z(L)$ induite par la filtration canonique de $U(L)$ est invariante par $\tilde{\varphi}$ qui induit donc un homomorphisme (d'algèbres) $gr(\tilde{\varphi})$ de $gr(Z(L))$ dans $gr(U(H))$.

2) L'homomorphisme $gr(\tilde{\varphi})$ est un isomorphisme de l'algèbre graduée $gr(Z(L))$ sur l'algèbre graduée $gr(U_{Int}(H))$, indépendant de la base de racines simples π.

Preuve. Voir [DIX, 7.4.5].

Preuve du Critère de complétude grâce à l'isomorphisme de Harish-Chandra.

Tout d'abord, il est facile de voir, puisque $U(H)$ est commutative et que la restriction de la forme de Killing K à $H \times H$ est non dégénérée, que $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1}) \mid U(H)$ est un isomorphisme d'algèbres de $U(H)$ sur $S(H^*)$. De plus $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(U_{Int}(H)) = S_{Int}(H^*)$. En effet si $h = \sum h_{i_1} * \ldots * h_{i_p} \in U(H)$ avec $h_{i_j} \in H$ alors $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h) = \sum K(h_{i_1},\ )_{|H} \ldots K(h_{i_p},\ )_{|H}$ et, pour tout $\alpha \in W^*$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{s_\alpha}((R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h)) &= \sum s_\alpha(K(h_{i_1},\ )_{|H}) \ldots s_\alpha(K(h_{i_p},\ )_{|H}) \\
&= \sum K(s_\alpha(h_{i_1}),\ )_{|H} \ldots K(s_\alpha(h_{i_p}),\ )_{|H} \\
&= (R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(\widetilde{s_\alpha}(h))
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne découle de l'égalité

$$K(s_\alpha(h),\, h') = K(h,\, s_\alpha(h'))$$

pour tous $h,\, h' \in H$. En effet, comme $s_\alpha(\alpha(h)h' - \alpha(h')h) = \alpha(h)h' - \alpha(h')h$, on a $K(H_\alpha,\, \alpha(h)h' - \alpha(h')h) = 0$ puisque la réflexion s_α (agissant sur H) laisse fixe l'hyperplan orthogonal à H_α (par rapport à K).

Soit maintenant $\{z_1, \ldots, z_l\}$ une partie de $Z^+(L)$ vérifiant les hypothèses du Critère. Alors, d'après ce qui précède, puisque $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble d'éléments homogènes de $S(H^*)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $S_{Int}(H^*)$, on en déduit que $\{h_{z_i},\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble d'éléments homogènes de $U_{Int}(H)$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $U_{Int}(H)$.

Par conséquent $\{gr(h_{z_i}),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble d'éléments homogènes de $gr(U_{Int}(H))$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $gr(U_{Int}(H))$. Or, d'après les hypothèses du Critère, $gr(\tilde{\varphi})(gr(z_i)) = gr(h_{z_i})$ donc, d'après l'isomorphisme de Harish-Chandra, on en déduit que $\{gr(z_i),\, 1 \leq i \leq l\}$ est un sous-ensemble d'éléments homogènes de $gr(Z(L))$ qui, avec l'unité, engendre l'algèbre $gr(Z(L))$. Par conséquent, $\{z_i,\, 1 \leq i \leq l\}$ engendre, avec l'unité, l'algèbre $Z(L)$.

Remarque. Bien que le Critère de "complétude" ne l'affirme pas, il découle de l'isomorphisme de Harish-Chandra et du Théorème de Chevalley qu'il existe toujours un ensemble formé d'opérateurs de Casimir vérifiant les hypothèses du Critère.

4 Le cas A_l, $l \in \mathbb{N}^*$

4.1 Préliminaires

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $l+1$. L'algèbre des endomorphismes de V de trace nulle est une algèbre de Lie, notée $sl(V)$. D'après [BOU I, § 6, n° 7, prop. 8], l'algèbre de Lie $sl(V)$ est semi-simple. L'application qui à un élément de $sl(V)$ fait correspondre sa matrice par rapport à une base fixée de V permet d'identifier $sl(V)$ et $sl(l+1, \mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_{l+1}(\mathbb{C}) \mid tr(M) = 0\}$ où l'on note, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes.

Posons $L := sl(l+1, \mathbb{C})$.

Soit $e_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $l+1$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1.

Soit H l'ensemble des éléments diagonaux de L. C'est une sous-algèbre commutative de L ayant pour base les éléments $h_i := e_{i,i} - e_{l+1,l+1}$ pour $1 \leq i \leq l$. Posons également $h_{l+1} := 0$.

Soit $(w_i)_{1 \leq i \leq l}$ la base de H^* duale de la base $(h_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $w_{l+1} := -\sum_{i=1}^{l} w_i$.

Soit $e_{w_i - w_j} := e_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq l+1$. On vérifie facilement que les $e_{w_i - w_j}$, pour $1 \leq i \neq j \leq l+1$, forment une base d'un supplémentaire de H dans L et que, pour $h \in H$,

$$[h,\, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$$

pour tout $\alpha \in W^*$ où W^* est l'ensemble formé des $w_i - w_j$ pour $1 \leq i \neq j \leq l+1$.

Il découle de ce qui précède que H est une sous-algèbre de Cartan de L déployante (car H est une sous-algèbre de Lie de L nilpotente, puisque commutative, qui est égale à son normalisateur dans L - ie à l'ensemble des x dans L tels que $[x, H] \subset H$ - et H est déployante car, pour tout $h \in H$, l'endomorphisme $ad\, h$ de L est trigonalisable et même diagonalisable) et que l'ensemble des racines de L relativement à H est W^*. Cet ensemble de racines est de type A_l d'après [BOU VI, § 4, n° 7]. Par suite L est simple (cf. [BOU VIII, § 3, n° 2]). Donc L est une algèbre de Lie simple déployable de type A_l.

4.2 Description du groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ et détermination de $S_{Int}(H^*)$

On pourra consulter [BOU VI, § 4, n° 7].

Rappelons les notations de la section 2.1. Soit $1 \leq i \neq j \leq l+1$. On note $H_{w_i - w_j}$ l'unique élément de $[\mathbb{C}e_{w_i - w_j}, \mathbb{C}e_{w_j - w_i}] \subset H$ tel que $(w_i - w_j)(H_{w_i - w_j}) = 2$. On vérifie que $H_{w_i - w_j} = h_i - h_j$ et que $s_{w_i - w_j}$ est la transposition échangeant w_i et w_j. Donc le groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ est le groupe symétrique de l'ensemble $\{w_i;\ 1 \leq i \leq l+1\}$ et $S_{Int}(H^*)$ est l'algèbre des polynômes $P(w_1, \ldots, w_{l+1})$ symétriques. D'après les formules de Newton (voir par exemple [RAM, 6.10.5]) cette algèbre est engendrée par l'unité et par les polynômes symétriques $\sum_{i=1}^{l+1} w_i^n$ pour $2 \leq n \leq l+1$ (puisque $\sum_{i=1}^{l+1} w_i = 0$) qui sont donc algébriquement indépendants (puisque, d'après le Théorème de Chevalley, $S_{Int}(H^*)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en l indéterminées).

4.3 Un ensemble complet pour $Z^+(L)$

Définissons maintenant une nouvelle base de L permettant de construire les éléments de Casimir. Posons $x_{i,j} := e_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq l+1$ et $x_{k,k} := h_k - \frac{1}{l+1}\sum_{j=1}^{l} h_j$ pour $1 \leq k \leq l+1$.

Alors $\mathcal{B} := \{x_{i,j},\ x_{k,k};\ 1 \leq i \neq j \leq l+1,\ 1 \leq k \leq l\}$ est une base de L. On vérifie les relations de commutation suivantes. Pour $1 \leq i, j, k, m \leq l+1$,

$$[x_{i,j},\ x_{k,m}] = \delta_{j,k} x_{i,m} - \delta_{i,m} x_{k,j}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Puis on définit par récurrence les éléments de $U(L)$ suivants. Pour tous $1 \leq i, j \leq l+1$, $(z_1)_{i,j} := x_{i,j}$ *et* $(z_{n+1})_{i,j} := \sum_{k=1}^{l+1} x_{i,k} * (z_n)_{k,j}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n := \sum_{i=1}^{l+1} (z_n)_{i,i}$, c'est-à-dire $z_n = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq l+1} x_{i_1,i_2} * x_{i_2,i_3} * \ldots * x_{i_n,i_1}$.

Des relations de commutation ci-dessus on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour $1 \leq i,\ j,\ k,\ m \leq l+1$,

$$\widetilde{ad\, x_{i,j}}((z_n)_{k,m}) = \delta_{j,k}(z_n)_{i,m} - \delta_{i,m}(z_n)_{k,j}$$

donc que

$$\begin{aligned} \widetilde{ad\, x_{i,j}}(z_n) &= \textstyle\sum_{s=1}^{l+1} (\delta_{j,s}(z_n)_{i,s} - \delta_{i,s}(z_n)_{s,j}) \\ &= (z_n)_{i,j} - (z_n)_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $z_n \in Z^+(L)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 1 (du Critère de complétude) : *L'ensemble* $\{z_n;\ 2 \leq n \leq l+1\}$ *est un ensemble complet de* $Z^+(sl(l+1, \mathbb{C}))$.

Preuve. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{z_n} := \sum_{i=1}^{l+1} (x_{i,i})^n$ (puissance calculée dans $U(H) \subset U(L)$).

Pour tous $1 \leq i, j \leq l$, $K(h_i, h_j) = \sum_{\alpha \in W^*} \alpha(h_i)\alpha(h_j)$ car $K(x, y) = tr(ad\, x \circ ad\, y)$ pour tous $x,\ y \in L$ et car $L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in W^*} L_\alpha)$ et $\dim(L_\alpha) = 1$. Tous calculs faits, on obtient $K(h_i, h_j) = 2(l+1)(1+\delta_{i,j})$. On en déduit donc que $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_i) = 2(l+1)(w_i - w_{l+1})$ et que $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) = 2^n(l+1)^n \sum_{i=1}^{l+1} w_i^n$ p uisque la restriction de $R \circ \delta \circ \lambda^{-1}$ à $U(H)$ est un morphisme d'algèbres.

Rappelons que l'algèbre $S_{Int}(H^*)$ est engendrée (avec l'unité de $S(H^*)$) par $\{\sum_{i=1}^{l+1} w_i^n;\ 2 \leq n \leq l+1\}$ donc par $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n});\ 2 \leq n \leq l+1\}$. Soit $b_{z_n} := z_n - h_{z_n}$. Alors si b_{z_n} est non nul, c'est une somme de monômes u en les éléments de la base $\mathcal{B}$ tels que $\mathcal{F}(u) \leq n$ et si $\mathcal{F}(u) = n$, au moins un facteur de u est un élément de $\{x_{i,j};\ 1 \leq i \neq j \leq l+1\}$. Soit $2 \leq n \leq l+1$. Alors $z_n \neq 0$ car sinon, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, h_{z_n} serait nul. Donc on peut parler de la filtration de z_n et on a $\mathcal{F}(z_n) = n = \mathcal{F}(h_{z_n})$. Donc $\{z_n;\ 2 \leq n \leq l+1\}$ vérifie toutes les hypothèses du Critère. D'où le corollaire.

5 Le cas B_l, $l \in \mathbb{N}^*$

5.1 Préliminaires

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2l+1 \geq 3$ et $Q : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V.

Il existe une base de V dans laquelle la matrice de Q s'écrit $S_l := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$ où I_l est la matrice identité d'ordre l.

Il suffit de prendre en effet une base orthonormale $\{f_k\}_{1 \leq k \leq 2l+1}$ de V pour Q puis de poser $g_0 = f_1$ et $g_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{k+1} + i f_{l+k+1})$ et $g_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{k+1} - i f_{l+k+1})$ pour $1 \leq k \leq l$. Alors la matrice de Q dans la base $\mathcal{B}_0 = (g_0, g_1, \ldots, g_l, g_{-1}, \ldots, g_{-l})$ est la matrice S_l.

L'ensemble des endomorphismes x de V tels que $Q(xv, w) + Q(v, xw) = 0$ pour tous $v, w \in V$ est une algèbre de Lie, appelée l'algèbre de Lie orthogonale $o(V)$ associée à Q. D'après [BOU I, § 6, n° 7, prop. 9], l'algèbre de Lie $o(V)$ est semi-simple puisque $\dim(V) \neq 2$. La matrice de Q par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ ci-dessus étant égale à S_l, l'algèbre de Lie $o(V)$ s'identifie à l'algèbre de Lie $o(2l+1, \mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_{2l+1}(\mathbb{C});\ {}^tMS_l = -S_lM\}$ où l'on note ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M.

Posons $L := o(2l+1, \mathbb{C})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, $M_2 \in \mathcal{M}_{1,l}(\mathbb{C})$, $M_3 \in \mathcal{M}_{1,l}(\mathbb{C})$, $M_4 \in \mathcal{M}_{l,1}(\mathbb{C})$, $M_5 \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$, $M_6 \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$, $M_7 \in \mathcal{M}_{l,1}(\mathbb{C})$, $M_8 \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$, $M_9 \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$ en notant $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices complexes à p lignes et r colonnes.

Alors

$$M \in L \iff \begin{cases} M_1 = 0,\ {}^tM_6 = -M_6,\ {}^tM_8 = -M_8, \\ {}^tM_2 = -M_7,\ {}^tM_3 = -M_4,\ {}^tM_5 = -M_9. \end{cases}$$

On en déduit que $\dim(L) = l(2l+1)$. De plus, de $M_1 = 0$ et ${}^tM_5 = -M_9$, on déduit que la trace de M est nulle (puisque $tr(M) = tr(M_1) + tr(M_5) + tr(M_9)$) et donc que $o(2l+1, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $sl(2l+1, \mathbb{C})$ formée des matrices carrées d'ordre $2l+1$ de trace nulle.

Soit $e_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $2l+1$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1.

Soit H l'ensemble des éléments diagonaux de L. C'est une sous-algèbre commutative de L ayant pour base les éléments $h_i := e_{i+1,i+1} - e_{i+l+1,i+l+1}$ pour $1 \leq i \leq l$.

Soit $(w_i)_{1 \leq i \leq l}$ la base de H^* duale de la base $(h_i)_{1 \leq i \leq l}$.

Posons

$$\begin{cases} e_{w_i} := e_{i+1,1} - e_{1,i+l+1} & 1 \leq i \leq l \\ e_{-w_i} := {}^te_{w_i} & 1 \leq i \leq l \\ e_{w_i - w_j} := e_{i+1,j+1} - e_{j+l+1,i+l+1} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{-w_i + w_j} := {}^te_{w_i - w_j} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{w_i + w_j} := e_{j+1,i+l+1} - e_{i+1,j+l+1} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{-w_i - w_j} := {}^te_{w_i + w_j} & 1 \leq i < j \leq l \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces éléments forment une base d'un supplémentaire de H dans L et que, pour $h \in H$,

$$[h,\, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$$

pour tout $\alpha \in W^*$ où W^* est l'ensemble formé des $\pm w_i$ $(1 \leq i \leq l)$ et des $\pm w_i \pm w_j$ $(1 \leq i < j \leq l)$.

Il découle de ce qui précède que H est une sous-algèbre de Cartan de L déployante et que l'ensemble des racines de L relativement à H est W^*. Cet ensemble de racines est de type B_l (cf. [BOU VI, § 4, n ° 5.I]) pour $l \geq 2$ et de type A_1 (qu'on note aussi B_1) pour $l = 1$. Donc $o(2l+1, \mathbb{C})$ est, pour $l \geq 1$, une algèbre de Lie simple déployable de type B_l.

5.2 Description du groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ et détermination de $S_{Int}(H^*)$

On pourra consulter [BOU VI, § 4, n ° 5].

Soit G_1 le sous-groupe de $Int(W^*, H)$ engendré par les réflexions $s_{w_i - w_j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq l$ et G_2 le sous-groupe de $Int(W^*, H)$ engendré par les réflexions s_{w_i} pour $1 \leq i \leq l$. D'après [BOU VI, § 1, n ° 5], $Int(W^*, H)$ est engendré par G_1 et G_2.

Rappelons les notations de la section 2.1. Pour calculer s_{w_i}, il nous faut H_{w_i} qui est l'élément de $\mathbb{C}[e_{w_i},\, e_{-w_i}]$ tel que $w_i(H_{w_i}) = 2$. Or $[e_{w_i},\, e_{-w_i}] = h_i$ donc $H_{w_i} = 2h_i$. De même on montre que $H_{w_i - w_j} = h_i - h_j$. On vérifie alors que $s_{w_i - w_j}$ échange w_i et w_j et laisse fixe w_k pour tout $k \notin \{i,\, j\}$ donc le groupe G_1 est isomorphe au groupe symétrique S_l par $s_{w_i-w_j} \mapsto \tau_{i,j}$ où $\tau_{i,j}$ est la transposition qui échange i et j. Quant aux réflexions s_{w_i}, elles transforment w_i en $-w_i$ et laissent fixes les w_k pour $k \neq i$. Donc G_2 est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ par $s_{w_i} \mapsto (1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1)$ (-1 étant en $i$ème position). De plus G_2 est distingué dans $Int(W^*, H)$. On vérifie en effet que, pour $1 \leq i \neq j \leq l$ et $1 \leq k \leq l$, $s_{w_i-w_j}s_{w_k}s_{w_i-w_j} = s_{w_k}$ si $k \notin \{i, j\}$, $s_{w_i-w_j}s_{w_i}s_{w_i-w_j} = s_{w_j}$ et $s_{w_i-w_j}s_{w_j}s_{w_i-w_j} = s_{w_i}$.

Rappelons (cf. [CAL, chap. V, 4]) qu'un groupe G est dit produit semi-direct des sous-groupes G_2 par G_1 lorsque G_2 est distingué dans G, que $G = G_2G_1$ et que $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ (où e est l'élément neutre du groupe G). En effet, pour $g_2,\, g_2' \in G_2$ et $g_1,\, g_1' \in G_1$, notant $(g_2,\, g_1)$ au lieu du produit g_2g_1, on a la règle de multiplication suivante : $(g_2,\, g_1).(g_2',\, g_1') = (g_2g_1g_2'g_1^{-1},\, g_1g_1')$.

Donc le groupe de Weyl $Int(W^*, H)$ est isomorphe au produit semi-direct de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ par S_l (ce dernier agissant sur le premier de sorte que, d'après les égalités ci-dessus, chaque permutation de S_l permute les termes du l-uplet de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$). Plus précisément l'isomorphisme de $Int(W^*, H)$ sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes S_l$ est défini par $\begin{cases} s_{w_i-w_j} \mapsto ((1, \ldots, 1), \tau_{i,j}) \\ s_{w_i} \mapsto ((1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1), Id) \end{cases}$
(-1 étant en $i$ème position) avec le produit suivant :
$((\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l), \sigma).((\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_l'), \sigma') = \big((\varepsilon_1\varepsilon'_{\sigma(1)}, \ldots, \varepsilon_l\varepsilon'_{\sigma(l)}), \sigma\sigma'\big)$ où $\varepsilon_i,\, \varepsilon_i' = \pm 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ et $\sigma,\, \sigma' \in S_l$.

Soit $P(w_1, \ldots, w_l)$ un polynôme de $S(H^*)$ invariant par le groupe de Weyl $Int(W^*, H)$. Alors $P(w_1, \ldots, w_l)$ doit être invariant lorsqu'on remplace w_i par $-w_i$ pour tout $1 \leq i \leq l$. Donc $P(w_1, \ldots, w_l) = Q(w_1^2, \ldots, w_l^2)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$. De plus Q doit être invariant par n'importe quelle permutation donc Q est un polynôme symétrique. Réciproquement on vérifie que tout polynôme P qui s'écrit $P(w_1, \ldots, w_l) = Q(w_1^2, \ldots, w_l^2)$, où Q est un polynôme symétrique de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$, est un élément de $S_{Int}(H^*)$. Or, d'après les formules de Newton, l'algèbre des polynômes symétriques de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$ est engendrée par les l polynômes $S_k := \sum_{i=1}^{l} X_i^k$ $(1 \leq k \leq l)$. Donc l'algèbre $S_{Int}(H^*)$ est engendrée (avec l'unité de $S(H^*)$) par les $\sum_{i=1}^{l} w_i^{2k}$ pour $1 \leq k \leq l$.

5.3 Un ensemble complet pour $Z^+(L)$

Renumérotons les indices de lignes et colonnes de la façon suivante.

Posons, pour $1 \leq i, j \leq l$, $E_{i,j} := e_{i+1,j+1}$, $E_{i,-j} := e_{i+1,j+l+1}$, $E_{-i,j} := e_{i+l+1,j+1}$, $E_{-i,-j} := e_{i+l+1,j+l+1}$, $E_{0,i} := e_{1,i+1}$, $E_{i,0} := e_{i+1,1}$, $E_{0,-i} := e_{1,i+l+1}$, $E_{-i,0} := e_{i+l+1,1}$, $E_{0,0} := e_{1,1}$.

Puis posons $x_{i,j} := E_{-j,i} - E_{-i,j}$ pour $-l \leq i, j \leq l$. (Remarquons que $x_{j,i} = -x_{i,j}$ pour tous $-l \leq i, j \leq l$. De plus, pour $1 \leq i \leq l$, $h_i = x_{i,-i}$, $e_{w_i} = x_{0,-i}$ et $e_{-w_i} = x_{i,0}$. Pour $1 \leq i \neq j \leq l$, $e_{w_i-w_j}$ (si $i < j$) ou $e_{-w_j+w_i}$

(si $i > j$) est égal à $x_{j,-i}$. Enfin pour $1 \leq i < j \leq l$, $e_{-w_i - w_j} = x_{j,i}$ et $e_{w_i+w_j} = x_{-i,-j}$).

Il est alors aisé de voir que $\mathcal{B} := \{x_{i,j};\ -l \leq j < i \leq l\}$ est une base de $o(2l+1,\, \mathbb{C})$. De plus on vérifie facilement les relations de commutation suivantes. Pour tous $-l \leq i, j, k, m \leq l$,

$$[x_{i,j},\, x_{k,m}] = \delta_{i,-m} x_{k,j} - \delta_{j,-k} x_{i,m} - \delta_{m,-j} x_{k,i} + \delta_{k,-i} x_{j,m}.$$

Définissons maintenant par récurrence les éléments de $U(L)$ suivants. Pour tous $-l \leq i, j \leq l$, $(z_1)_{i,j} := x_{i,j}$ *et* $(z_{n+1})_{i,j} := \sum_{k=-l}^{l} x_{i,k} * (z_n)_{-k,j}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n := \sum_{i=-l}^{l} (z_n)_{-i,i}$, c'est-à-dire $z_n = \sum_{-l \leq i_1, \ldots, i_n \leq l} x_{-i_1,i_2} * x_{-i_2,i_3} * \ldots * x_{-i_n,i_1}$. Des relations de commutation ci-dessus on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour $-l \leq j < i \leq l$ et $-l \leq k, m \leq l$

$$\widetilde{ad\, x_{i,j}}((z_n)_{k,m}) = \delta_{i,-m}(z_n)_{k,j} - \delta_{j,-k}(z_n)_{i,m} - \delta_{m,-j}(z_n)_{k,i} + \delta_{k,-i}(z_n)_{j,m}$$

donc que

$$\begin{aligned} \widetilde{ad\, x_{i,j}}(z_n) &= \textstyle\sum_{s=-l}^{l} \left(\delta_{i,-s}(z_n)_{-s,j} - \delta_{j,s}(z_n)_{i,s} - \delta_{s,-j}(z_n)_{-s,i} + \delta_{-s,-i}(z_n)_{j,s}\right) \\ &= (z_n)_{i,j} - (z_n)_{i,j} - (z_n)_{j,i} + (z_n)_{j,i} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $z_n \in Z^+(L)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 2 (du Critère de complétude) : *L'ensemble* $\{z_2, z_4, \ldots, z_{2l}\}$ *est un ensemble complet de* $Z^+(o(2l+1, \mathbb{C}))$.

Preuve. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{z_n} := 2\sum_{i=1}^{l} (x_{i,-i})^n = 2\sum_{i=1}^{l} h_i^n$ (puissance calculée dans $U(H) \subset U(L)$).

Alors $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) = 2\sum_{i=1}^{l} (R \circ \delta)(h_i^n)$ (où cette fois h_i^n est calculé dans $S(L)$). D'où $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) = 2\sum_{i=1}^{l} \left((R \circ \delta)(h_i)\right)^n$ car R et δ sont des morphismes d'algèbres. Or $(R \circ \delta)(h_i) = K(h_i,\, .)_{|H}$ donc il nous faut calculer $\left((R \circ \delta)(h_i)\right)(h_j) = K(h_i,\, h_j)$ pour $1 \leq i, j \leq l$. On a $K(h_i,\, h_j) = \sum_{\alpha \in W^*} \alpha(h_i)\alpha(h_j) = (4l-2)\delta_{i,j}$ donc $(R \circ \delta)(h_i) = (4l-2)w_i$ d'où

$$\begin{aligned} (R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) &= 2\textstyle\sum_{i=1}^{l} \left((4l-2)w_i\right)^n \\ &= 2(4l-2)^n \textstyle\sum_{i=1}^{l} w_i^n \end{aligned}$$

Rappelons que l'algèbre $S_{Int}(H^*)$ est engendrée (avec l'unité de $S(H^*)$) par $\{\sum_{i=1}^{l} w_i^{2k};\ 1 \leq k \leq l\}$ donc par $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_{2k}});\ 1 \leq k \leq l\}$. Soit $b_{z_{2k}} := z_{2k} - h_{z_{2k}}$. Alors si $b_{z_{2k}}$ est non nul, c'est une somme de monômes u en les éléments de la base $\mathcal{B}$ tels que $\mathcal{F}(u) \leq 2k$ et si $\mathcal{F}(u) = 2k$, au moins un facteur de u est un élément de $\{x_{i,j};\ -l \leq j < i \leq l,\ j \neq -i\}$. Soit $1 \leq k \leq l$. Alors $z_{2k} \neq 0$ car sinon, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $h_{z_{2k}}$ serait nul. Donc on peut parler de la filtration de z_{2k} et on a $\mathcal{F}(z_{2k}) = 2k = \mathcal{F}(h_{z_{2k}})$. L'ensemble $\{z_{2k};\ 1 \leq k \leq l\}$ vérifie donc toutes les hypothèses du Critère. D'où le corollaire.

Remarque. Les z_{2k+1}, pour $k \in \mathbb{N}$, sont nuls. En effet si z_{2k+1} n'était pas nul, d'une part sa filtration serait égale à $2k+1$ et d'autre part, d'après le Corollaire 2, z_{2k+1} s'écrirait comme un polynôme en des éléments tous de filtration paire donc serait de filtration paire (la filtration du produit de deux éléments non nuls de $U(L)$ est en effet égale à la somme de leur filtration, cf. [DIX, 2.3.9]).

6 Le cas C_l, $l \in \mathbb{N}^*$

6.1 Préliminaires

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $Q : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V. L'existence d'une forme bilinéaire alternée sur V implique que la dimension de V soit paire. Notons $2l$, avec $l \geq 1$, sa dimension.

De plus il existe une base $\mathcal{B}_0$ de V dans laquelle la matrice de Q s'écrit $J_l := \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$. (Voir par exemple [DEH, III.3]).

L'algèbre de Lie symplectique $sp(V)$ associée à Q est l'ensemble des endomorphismes x de V tels que $Q(xv,\, w) + Q(v,\, xw) = 0$ pour tous $v,\, w \in V$. D'après [BOU I, § 6, n ° 7, prop. 9], l'algèbre de Lie $sp(V)$ est semi-simple. La matrice de Q par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ étant égale à J_l, l'algèbre de Lie $sp(V)$ s'identifie à l'algèbre de Lie $sp(2l,\, \mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_{2l}(\mathbb{C});\ {}^tMJ_l = -J_lM\}$.

Posons $L := sp(2l,\, \mathbb{C})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A,\, B,\, C,\, D \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$.

Alors $M \in L \iff \begin{cases} A = -{}^tD \\ B = {}^tB \\ C = {}^tC \end{cases}$.

On en déduit que $\dim(L) = l^2 + 2 \times \frac{l(l+1)}{2} = l(2l+1)$. De plus, de $A = -{}^tD$, on déduit que la trace de M est nulle et donc que $sp(2l,\, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $sl(2l,\, \mathbb{C})$.

Soit $e_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $2l$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1.

Soit H l'ensemble des éléments diagonaux de L. C'est une sous-algèbre commutative de L ayant pour base les éléments $h_i := e_{i,i} - e_{i+l,i+l}$ pour $1 \leq i \leq l$.

Soit $(w_i)_{1 \leq i \leq l}$ la base de H^* duale de la base $(h_i)_{1 \leq i \leq l}$.

Posons

$$\begin{cases} e_{2w_i} := e_{i,i+l} & 1 \leq i \leq l \\ e_{-2w_i} := {}^t e_{2w_i} & 1 \leq i \leq l \\ e_{w_i - w_j} := e_{i,j} - e_{j+l,i+l} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{-w_i + w_j} := {}^t e_{w_i - w_j} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{w_i + w_j} := e_{j,i+l} + e_{i,j+l} & 1 \leq i < j \leq l \\ e_{-w_i - w_j} := {}^t e_{w_i + w_j} & 1 \leq i < j \leq l \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces éléments forment une base d'un supplémentaire de H dans L et que, pour $h \in H$,

$$[h,\, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$$

pour tout $\alpha \in W^*$ où W^* est l'ensemble formé des $\pm 2w_i$ $(1 \leq i \leq l)$ et des $\pm w_i \pm w_j$ $(1 \leq i < j \leq l)$.

Il découle de ce qui précède que H est une sous-algèbre de Cartan de L déployante et que l'ensemble des racines de L relativement à H est W^*. Cet ensemble de racines est de type C_l (cf. [BOU VI, § 4, n ° 6.I]) pour $l \geq 2$ et de type A_1 (qu'on note aussi C_1) pour $l = 1$. Donc $sp(2l,\, \mathbb{C})$ est, pour $l \geq 1$, une algèbre de Lie simple déployable de type C_l.

6.2 Description du groupe de Weyl $Int(W^*,\, H)$ et détermination de $S_{Int}(H^*)$

Le groupe de Weyl de $sp(2l,\, \mathbb{C})$ est isomorphe à celui de $o(2l+1,\, \mathbb{C})$ car leurs systèmes de racines sont inverses l'un de l'autre, cf. [BOU VI, § 1, n ° 1]. Par conséquent l'algèbre des invariants $S_{Int}(H^*)$ de $sp(2l,\, \mathbb{C})$ est engendrée (avec l'unité de $S(H^*)$) par les $\sum_{i=1}^{l} w_i^{2k}$ pour $1 \leq k \leq l$.

6.3 Un ensemble complet pour $Z^+(L)$

Renumérotons les indices de lignes et colonnes de la façon suivante.

Posons, pour $1 \leq i, j \leq l$, $E_{i,j} := e_{i,j}$, $E_{i,-j} := e_{i,j+l}$, $E_{-i,j} := e_{i+l,j}$, $E_{-i,-j} := e_{i+l,j+l}$.

Puis posons $x_{i,j} := \varepsilon_i E_{i,-j} + \varepsilon_j E_{j,-i}$ pour $-l \leq i,j \leq l$, $i, j \neq 0$ où $\varepsilon_i = 1$ si $i > 0$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i < 0$. (Remarquons que $x_{j,i} = x_{i,j}$ pour tous $-l \leq i,j \leq l$, $i,j \neq 0$. De plus, pour $1 \leq i \leq l$, $h_i = x_{i,-i}$, $e_{2w_i} = \frac{1}{2} x_{i,i}$ et $e_{-2w_i} = -\frac{1}{2} x_{-i,-i}$. Pour $1 \leq i \neq j \leq l$, $e_{w_i - w_j}$ (si $i < j$) ou $e_{-w_j + w_i}$ (si $i > j$) est égal à $x_{i,-j}$. Enfin pour $1 \leq i < j \leq l$, $e_{-w_i - w_j} = -x_{-i,-j}$ et $e_{w_i + w_j} = x_{i,j}$).

Il est alors aisé de voir que $\mathcal{B} := \{x_{i,j};\ -l \leq j \leq i \leq l,\, i,j \neq 0\}$ est une base de $sp(2l,\, \mathbb{C})$. De plus on vérifie facilement les relations de commutation suivantes. Pour tous $-l \leq i, j, k, m \leq l$, $i,\, j,\, k,\, m \neq 0$

$$[x_{i,j},\, x_{k,m}] = \varepsilon_k \delta_{-j,k} x_{i,m} + \varepsilon_m \delta_{-m,i} x_{k,j} + \varepsilon_m \delta_{m,-j} x_{k,i} + \varepsilon_k \delta_{k,-i} x_{j,m}.$$

Posons pour $i, j \in \{\pm 1, \ldots, \pm l\}$, $(z_1)_{i,j} := \varepsilon_i x_{i,j}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_{n+1})_{i,j} := \varepsilon_i \sum_{-l \leq i_k \leq l,\, i_k \neq 0} x_{i,-i_k} * (z_n)_{i_k,j}$. Puis $z_n := \sum_{-l \leq i \leq l,\, i \neq 0} (z_n)_{i,-i}$ c'est-à-dire

$$z_n = \sum_{-l \leq i_1, \ldots, i_n \leq l,\, i_1 \neq 0, \ldots, i_n \neq 0} \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_n} x_{i_1,-i_2} * x_{i_2,-i_3} * \ldots * x_{i_n,-i_1}.$$

Des relations de commutation ci-dessus on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour $-l \leq j \leq i \leq l$ et $-l \leq k, m \leq l$, $i, j, k, m \neq 0$

$$\begin{aligned} \widetilde{ad\, x_{i,j}}((z_n)_{k,m}) = \;& \varepsilon_i \delta_{-j,k} (z_n)_{i,m} + \varepsilon_m \delta_{-j,m} (z_n)_{k,i} \\ & + \varepsilon_j \delta_{-i,k} (z_n)_{j,m} + \varepsilon_m \delta_{-i,m} (z_n)_{k,j} \end{aligned}$$

donc que

$$\begin{aligned} \widetilde{ad\, x_{i,j}}(z_n) = \;& \textstyle\sum_{s=-l}^{l} (\varepsilon_i \delta_{-j,s} (z_n)_{i,-s} + \varepsilon_{-s} \delta_{-j,-s} (z_n)_{s,i} \\ & + \varepsilon_j \delta_{-i,s} (z_n)_{j,-s} + \varepsilon_{-s} \delta_{-i,-s} (z_n)_{s,j}) \\ = \;& \varepsilon_i (z_n)_{i,j} + \varepsilon_{-j} (z_n)_{j,i} + \varepsilon_j (z_n)_{j,i} + \varepsilon_{-i} (z_n)_{i,j} \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $z_n \in Z^+(L)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 3 (du Critère de complétude) : *L'ensemble* $\{z_2, z_4, \ldots, z_{2l}\}$ *est un ensemble complet de* $Z^+(sp(2l, \mathbb{C}))$.

Preuve. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{z_n} := \sum_{-l \leq i \leq l,\, i \neq 0} (\varepsilon_i)^n (x_{i,-i})^n$ (puissance calculée dans $U(H) \subset U(L)$). Alors, pour n pair, $h_{z_n} = 2 \sum_{i=1}^{l} (x_{i,-i})^n = 2 \sum_{i=1}^{l} h_i^n$ et $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) = 2 \sum_{i=1}^{l} (R \circ \delta)(h_i^n)$ (où cette fois h_i^n est calculé dans $S(L)$). D'où $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) = 2 \sum_{i=1}^{l} ((R \circ \delta)(h_i))^n$. On vérifie que, pour $1 \leq i, j \leq l$, $K(h_i, h_j) = 4(l+1)\delta_{i,j}$ donc $(R \circ \delta)(h_i) = 4(l+1) w_i$ d'où, pour n pair,

$$\begin{aligned} (R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n}) &= 2 \textstyle\sum_{i=1}^{l} (4(l+1) w_i)^n \\ &= 2(4(l+1))^n \textstyle\sum_{i=1}^{l} w_i^n \end{aligned}$$

Rappelons que l'algèbre $S_{Int}(H^*)$ est engendrée (avec l'unité de $S(H^*)$) par $\{\sum_{i=1}^{l} w_i^{2k};\, 1 \leq k \leq l\}$ donc par $\{(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_{2k}});\, 1 \leq k \leq l\}$. Soit $b_{z_{2k}} := z_{2k} - h_{z_{2k}}$. Alors si $b_{z_{2k}}$ est non nul, c'est une somme de monômes u en les éléments de la base $\mathcal{B}$ tels que $\mathcal{F}(u) \leq 2k$ et si $\mathcal{F}(u) = 2k$, au moins un facteur de u est un élément de $\{x_{i,j};\, -l \leq j \leq i \leq l,\ i, j \neq 0 \ et\ j \neq -i\}$. Soit $1 \leq k \leq l$. Alors $z_{2k} \neq 0$ car sinon, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $h_{z_{2k}}$ serait nul. Donc on peut parler de la filtration de z_{2k} et on a $\mathcal{F}(z_{2k}) = 2k = \mathcal{F}(h_{z_{2k}})$. L'ensemble $\{z_{2k};\, 1 \leq k \leq l\}$ vérifie donc toutes les hypothèses du Critère. D'où le corollaire.

Remarque. Les z_{2k+1}, pour $k \in \mathbb{N}$, sont nuls pour la même raison que dans le cas B_l.

7 Bibliographie

[BE1] : F. BERDJIS, "A criterion for completeness of Casimir operators", J. Math.Phys. 22 (9), September 1981.

[BE2] : F. BERDJIS, "Casimir operators for F_4, E_6, E_7 and E_8", J. Math.Phys. 22 (9), September 1981.

[BOU] : N.BOURBAKI, Eléments de Mathématiques, Groupes et Algèbres de Lie.

[CAL] : Josette CALAIS, Eléments de théorie des groupes, PUF, Paris, 1984.

[CHE1] : Claude CHEVALLEY, "Invariants of finite groups generated by reflections", Am. J. Math, 77, p 778-782, 1955.

[CHE2] : Claude CHEVALLEY, Théorie des Groupes de Lie, Hermann, Paris, 1968.

[DEH] : René DEHEUVELS, Formes quadratiques et groupes classiques, PUF, Paris, 1981.

[DIX] : Jacques DIXMIER, Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[RAM] : E.RAMIS, C.DESCHAMPS, J.ODOUX, Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 1, Algèbre.