Sur les origines du cocycle de Virasoro

Claude Roger

22 février 2001

Ce bref article a pour but de retracer l'histoire du cocycle de Virasoro et de son analogue au niveau du groupe. Rappelons l'importance essentielle de ce cocycle dans de nombreux domaines, classes caractéristiques, théorie des représentations, théorie des champs conformes, pour ne citer que quelques exemples. Sans cherche à faire oeuvre d'historien à proprement parler, qui serait de toutes façons prématuré, nous avons tenté de décrire la généalogie de ce cocycle, de retrouver ses racines tant mathématiques que physiques ; nous avons ainsi parcouru des domaines aussi variés que fascinants, à première vue très éloignés les uns des autres, de l'algèbre homologique à la théorie des champs.

On peut distinguer sommairement deux origines principales : l'une purement algébrique avec les multiplicateurs de Schur qui marquèrent les débuts de l'algèbre homologique, l'autre physique avec les célèbres termes de Schwinger, première apparition des anomalies en théorie quantique des champs. Un point commun à ces deux origines est l'apparition dans les deux contextes d'un cocycle universel de la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}(A\delta B)$ (nous ne précisons pas davantage pour l'instant) analogue à celui gouvernant l'extension centrale de l'algèbre des matrices de Jacobi (voir [21]) ou encore celle des groupes linéaires restreints (voir [33]).

L'aspect purement algébrique est celui de la théorie des extensions centrales des groupes et algèbres de Lie, que l'on peut trouver par exemple dans le traité de Hilton et Stammbach([19]). Pour les groupes discrets le résultat essentiel est le suivant : si G est un groupe parfait, c'est-à-dire si $H_1(G) = G/[G, G] = 0$, alors il existe une extension centrale universelle

$$(1) \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow G \longrightarrow (1) \tag{1}$$

et, plus généralement, toutes les extensions centrales $(1) \to C \to E \to G \to (1)$ sont classifiées par une classe de cohomologie $c \in H^2(G, C) = Hom(H_2(G), C)$. On peut établir en outre une bijection entre les classes d'équivalence d'extensions centrales de G et les sous-espaces de $H_2(G)$ en faisant correspondre à chaque extension le sous-groupe Ker $C \subset H_2(G)$. Ce théorème est dû sous cette forme très générale à Michel Kervaire (1970) [24], mais une première version en est apparue dès 1904 pour le cas où le groupe G est fini, le groupe $H_2(G)$ étant alors connu sous le nom des **multiplicateurs de Schur**. Une étape intermédiaire essentielle est due à Heinz Hopf avec son article de 1942 ([28]) contenant la célèbre présentation du H_2 par générateurs et relations : $H_2(G) = (R \cap [F, F])/[R, F]$. Il souligna l'analogie entre les extensions centrales de groupes et les revêtements des espaces topologiques, $H_2(G)$ correspondant alors au groupe fondamental $\pi_1(X)$; cette observation devait s'avérer très féconde pour le développement de la théorie, comme nous le verrons dans la suite... Curieusement, la théorie analogue pour les algèbres de Lie dut attendre 1982 (Loday et Kassel [23]) pour être publiée explicitement, même si elle était considérée comme résultat "folklorique" ; la cohomologie des algèbres de Lie fut inventée par Chevalley et Eilenberg([7]) puis développée par J. L. Koszul([25]) dans sa thèse de 1950. Mais il fallut attendre les années 70 pour qu'elle connut son plein développement avec ses applications en théorie des représentations, topologie différentielle, et déjà physique théorique comme nous allons le voir. Le problème de l'extension centrale universelle se résoud comme pour les groupes : si $H_1(\mathbf{g}) = 0$, alors $\mathbf{g}$ admet une extension centrale universelle

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbf{g}) \longrightarrow \widehat{\mathbf{g}} \longrightarrow \mathbf{g} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

C'est également à cette époque que commencèrent les travaux de Gelfand et Fuks sur la cohomologie des algèbres de Lie de champs formels et des champs de vecteurs ; le calcul de $H^*(\mathrm{Vect}(S^1))$ contenant la première apparition du 2-cocycle central fut publié en 1968 [17]. Un résultat important a été la détermination de la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ obtenue par produit tensoriel de la k-algèbre de Lie $\mathbf{g}$ et de la k-algèbre associative et commutative $\mathcal{A}$, le crochet étant défini par $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$. Les algèbres de courants, apparues en physique avec les théories de jauge non abéliennes (champs de Yang-Mills) relèvent de cette famille avec $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ une algèbre de fonctions C^∞ sur un espace-temps, et $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, représentant les symétries internes du problème, le plus souvent $\mathbf{g} = \mathbf{su}(n)$. Si maintenant on considère le cas très particulier où $\mathcal{A} = C^\infty(S^1)$, l'algèbre $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ n'est autre que l'algèbre de Lie des lacets sur $\mathbf{g}$; l'extension centrale universelle de cette algèbre de Lie a été mise en évidence indépendamment par V. Kac [20] et R. Moody [29] dans leur magistrale classification des algèbres de Lie filtrées. Ces extensions centrales devaient connaître une brillante destinée, sous le nom d'algèbres de Kac-Moody ; remarquons cependant que dans son célèbre livre, Victor Kac indique au chapitre 7... *"the formula for the cocycle has been known to physicists for such a long time that it is difficult to trace the original source..."*. Rappelons donc cette fameuse formule :

Pour f et g dans $\mathbf{g} \otimes C^\infty(S^1) = C^\infty(S^1, \mathbf{g})$, on a $c(f, g) = \int_{S^1} \kappa(f dg)$ où $\kappa : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to k$ désigne la forme de Killing. Si l'on préfère une approche complexe, on a pour f et g dans $\mathbf{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, $c(f, g) = \mathrm{Res}_{z=0}\kappa(f dg)$. Dans ces deux formules, le cocycle est obtenu à partir de deux ingrédients : d'une part une forme bilinéaire invariante, ici la forme de Killing accompagnée de l'intégrale, ou du résidu ce qui revient au même, d'autre part une dérivation extérieure de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$, ici l'application $f \to f'$. En toute rigueur, la preuve de l'universalité de cette extension repose sur le calcul de la cohomologie des algèbres de lacets (voir par exemple Pressley et Segal [33], ou Lepowsky [26]).

On verra que dans certains cas cette construction peut se généraliser : si $\mathbf{g}$ est une algèbre de Lie munie d'une forme invariante $\kappa^- : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to k$, on peut associer à une dérivation $\delta : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$, un 2-cocycle $c_\delta : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to k$ sous certaines conditions d'antisymétrie . Revenons à la cohomologie de $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$; le pas décisif fut franchi par S. Bloch dans un article mémorable [3]. Si $\mathbf{g} = \mathbf{sl}(n)$, on a $H_2(\mathbf{g}_{\mathcal{A}}) = \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ où $\Omega^1\mathcal{A}$ désigne l'espace des différentielles de Kähler sur $\mathcal{A}$ et $d\mathcal{A}$ le sous-espace des différentielles exactes. Ce résultat s'obtient par la construction explicite d'une extension centrale

$$0 \longrightarrow \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{g}_{\mathcal{A}} \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

dont S. Bloch montre l'universalité, au moins pour $\mathbf{g} = \mathbf{sl}(n)$ avec n suffisamment grand. Remarquons que si $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ est l'algèbre des courants sur une variété V, alors $\Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} = \Omega^1(V)/d\Omega^0(V)$ (le calcul du H_2 a été réalisé dans ce cas par B. Feigin et B. Tsygan, indépendamment du résultat de S. Bloch) et en particulier si $V = S^1$, alors $\Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ via l'intégrale et on retrouve l'algèbre de Kac-Moody associée à $\mathbf{g}$. D'ailleurs, dans l'introduction de [3], S. Bloch indique dans son remerciement à Deligne que ... *"In communicating to me his construction, Deligne remarked (cryptically, as his wont) that he had found it while thinking about Kac-Moody Lie algebras..."*. Une étape importante de cette généralisation du cocycle de Kac-Moody a été la construction générale des traces et des résidus pour les différentielles sur des courbes quelconques, due à J. Tate [40]. La forme explicite du cocycle de l'extension (3) est la suivante

$$c(X \otimes a, I \otimes b) = \kappa(X, Y)[adb] \tag{4}$$

où $[adb]$ désigne la classe de la différentielle adb modulo les différentielles exactes. Si on a une application $I : \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} \to k$, comme par exemple l'intégration sur un cycle pour $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, on en déduit une extension centrale à noyau scalaire par la formule $c_I(X \otimes a, Y \otimes b) = \kappa(X, Y)I(adb)$.

Ce résultat inspira les travaux de Loday et Quillen qui purent calculer l'homologie de $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ où $\mathbf{g} = \mathbf{gl}(\infty) = \varinjlim \mathbf{gl}(n)$. Cette homologie est munie naturellement d'une structure d'algèbre de Hopf, dont on peut déterminer l'espace des éléments primitifs ; on obtient

$$\mathrm{Prim}(H_*(\mathbf{g}_{\mathcal{A}}, k)) = HC_*(\mathcal{A})$$

avec un décalage d'indices (Théorème de Loday et Quillen). HC_* désigne ici l'homologie cyclique, et ce résultat généralise bien celui de Bloch car $HC_1(\mathcal{A}) = \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ est une k-algèbre commutative lisse (Feigin et Tsygan l'avaient obtenue indépendamment de A. Connes, sous le nom de "K-théorie additive") : à $H_2(\mathbf{g}_{\mathcal{A}}) = HC_1(\mathcal{A})$ correspond $H_2(E(\mathcal{A})) = K_2(\mathcal{A})$ avec l'extension centrale de groupes

$$(1) \longrightarrow K_2(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{St}(\mathcal{A}) \longrightarrow E(\mathcal{A}) \longrightarrow (1) \tag{5}$$

où $E(A)$ désigne le sous-groupe du groupe linéaire infini engendré par les matrices élémentaires (voir Milnor [28]).

Nous voici, en apparence du moins, éloignés du cocycle de Virasoro. Revenons à une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ munie d'une forme invariante $\kappa : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to k$, et soit $\delta : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ une dérivation. Il est facile de vérifier que si l'application $(X, Y) \to \kappa(X, \delta Y)$ est antisymétrique, elle définit un 2-cocycle noté c_δ. En particulier si $\mathbf{g}$ est une algèbre de Lie obtenue par antisymétrisation d'une algèbre associative, l'existence d'une trace permet de déduire une forme bilinéaire invariante par $\kappa(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. C'est le cas des algèbres de Kac-Moody en considérant chaque algèbre de Lie semi-simple de dimension finie comme sous-algèbre d'un $\mathbf{gl}(n)$; pour les algèbres de courants $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$, on peut obtenir une trace en utilisant un "résidu" ou une "intégrale" : $\Omega^1 \mathcal{A} \to k$; enfin, rappelons l'existence d'une trace bien connue, celle d'Adler, sur l'algèbre associative $\psi\mathcal{D}(S^1)$ des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels sur S^1, $\mathrm{Tr}\Big(\sum_{i=-\infty}^{n} a_i(x)\xi^i\Big) = \int_{S^1} a_{-1}(x)dx$, qui nous permet de construire deux extensions centrales indépendantes avec les dérivations extérieures $\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,\xi$ et $\mathrm{ad}\, x$ qui donnent les cocycles $c_1(D_1, D_2) = \mathrm{Tr}(D_1[\mathrm{Log}\,\xi, D_2])$ et $c_2(D_1, D_2) = \mathrm{Tr}(D_1[x, D_2])$ (résultat de O. Kravchenko et B. Khesin). Rappelons que le plongement naturel $\mathrm{Vect}(S^1) \to \psi\mathcal{D}(S^1)$ permet d'induire de c_1 le cocycle de Virasoro.

En fait tous ces multiples cocycles à valeurs scalaires peuvent s'obtenir par plongement de l'algèbre de Lie concernée dans l'algèbre des matrices de Jacobi et restriction du fameux cocycle universel, qualifié parfois de cocycle japonais dans la littérature de langue russe, en raison de son utilisation décisive par M.Jimbo et son école dans l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type KP. Rappelons brièvement sa formule : les matrices de Jacobi sont des matrices doublement infinies a_{ij} pour $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient $a_{ij} = 0$ si $|i - j|$ est assez grand ; il est facile de vérifier que ces matrices forment une algèbre associative et donc une algèbre de Lie par antisymétrisation. Si l'on note alors J la matrice définie par $a_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{sgn}(i)$ pour $j \neq 0$ et $a_{00} = 1$, le cocycle va s'écrire

$$c(A, B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A[J, B]) \tag{6}$$

Une telle formule est a priori dépourvue de sens car la trace n'est pas définie pour une matrice de Jacobi, mais ici un calcul direct montre que $A[J, B]$ est en fait une matrice finie (c'est à dire une matrice dont tous les éléments sont nuls à l'exception d'un nombre fini). Pour les amateurs de formules explicites on peut décomposer chaque matrice de Jacobi en blocs $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, et alors $c(A, B) = \mathrm{Tr}(A_{21}B_{12} - A_{12}B_{21})$, la vérification de la propriété de cocycle étant alors un exercice élémentaire (cf. [21]).

On obtient une extension centrale non triviale

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \widehat{\mathbf{gl}}_J(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{gl}_J(\mathcal{A}) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

La seule condition imposée à l'anneau de base $\mathcal{A}$ est d'être soit une algèbre commutative sur le corps k avec une intégrale ou un résidu permettant de définir une trace à valeurs scalaires $\mathrm{Tr} : \mathbf{gl}_{\mathrm{fini}}(\mathcal{A}) \to k$. Une extension analogue peut se construire avec un habillage analytique, avec des espaces de Hilbert, ce qui permet son intégration au niveau du groupe linéaire ; la construction détaillée se trouve dans [33] ; rappelons seulement qu'en partant d'un espace de Hilbert décomposé suivant $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ et en posant $J_{|\mathcal{H}_\pm} = \pm \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pm}$ on définit le groupe linéaire restreint $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$ comme le sous-groupe des applications linéaires bornées $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telles que $[J, A]$ soit de Hilbert-Schmidt ; on remarque alors que pour A et B dans $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, $A[J, B]$ est traçable autrement dit $\mathrm{Tr}(A[J, B])$ est bien définie. On en déduit les extensions au niveau du groupe et de l'algèbre de Lie

$$(0) \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \longrightarrow (0) \tag{8}$$

$$(0) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbf{gl}_{\mathrm{res}}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{gl}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \longrightarrow (0) \tag{9}$$

L'extension (9) est en quelque sorte la complétion de (7). Le cocycle de Virasoro et celui de Bott-Thurston pour $\mathrm{Diff}(S^1)$ peuvent être obtenus via un plongement de $\mathrm{Diff}(S^1)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, respectivement de $\mathrm{Vect}(S^1)$ dans $\mathbf{gl}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, déduit de l'action de $\mathrm{Diff}(S^1)$ sur $\mathcal{H} = L^2(S^1, \mathbb{C})$ par changement de variables. Ce cocycle a une parfaite analogie formelle avec celui de (4): il est de la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}(A\delta B)$ où δ est une dérivation ; cependant cette analogie n'est que formelle, car la trace n'est pas définie globalement sur $\mathbf{gl}_J$ ou $\mathbf{gl}_{\mathrm{res}}$ et l'application $A \to [J, A]$ n'est pas une dérivation extérieure. Ce cocycle a été généralisé par Alain Connes qui en a fait l'une des pierres angulaires de sa géométrie non commutative [8] dans le cadre des modules de Fredholm, qui sont des espaces de Hilbert gradués $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Une formule $\mathrm{Tr}_S(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma F[F, A])$ permet de définir une trace, où γ est un opérateur de graduation sur $\mathcal{H}$. Le cocycle précédent peut alors s'écrire sous la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}_S(A.[F, B])$; il apparaît ainsi comme un exemple de classe de cohomologie cyclique ([9]), et en quelque sorte le prototype de celles-ci. L'opérateur $A \to dA = [F, A]$ est appelé différentielle quantique ; l'analogie avec le cocycle (4) est ainsi rendue plus précise.

Nous avons déjà mentionné l'intervention décisive de ce cocycle dans les travaux de l'école dite de Kyoto (M. Jimbo et ses collaborateurs) sur les systèmes intégrables, et notamment les hiérarchies KdV et KP [21]. Cependant on ne peut leur attribuer la priorité de la découverte de ce cocycle dont la première description dans un cadre mathématique précis apparaît dans le célèbre traité de Pressley et Segal [33]. Tel ou tel mathématicien pourra en revendiquer la paternité, mais en réalité il trouve son origine en physique dans les travaux de F. Berezin ([2], 1965) sur la seconde quantification. Signalons toutefois que Y. Neretin [30] affirme que la première formule explicite pour ce cocycle est apparue chez K.O. Friedrichs [15]... Cela nous fournit une transition naturelle vers les origines physiques du cocycle de Virasoro.

Rappelons simplement le principe de la dite seconde quantification [30] : on associe à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (espace des états) un espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ (fermionique ou bosonique) et on essaie de prolonger l'action d'un groupe de symétries de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. La solution existe pour un groupe linéaire restreint (symplectique ou orthogonal suivant le cas) et la représentation sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est alors projective et non plus linéaire ; c'est ainsi que le cocycle (6) est apparu, comme terme central d'une extension du "**groupe canonique**", selon la terminologie employée dans la littérature physique. Ceci nous conduit à évoquer les "**anomalies**", qui ne sont autres que les classes de cohomologie qui apparaissent en physique quantique, principalement dans la théorie des champs...

Une anomalie pourra être un défaut à être un homomorphisme, ou un défaut à être une action de groupe, ou encore une courbure... Ces défauts se représentent par des classes de cohomologie appropriées, mais l'élaboration du cadre nécessaire pour ces cohomologies (cohomologie de groupes, d'algèbres de Lie, ou théories topologiques...) est souvent fort délicate, et a parfois suscité des problèmes mathématiques originaux et difficiles... Ces anomalies pourront être "globales", c'est-à-dire représenter des invariants topologiques, du type classes caractéristiques, comme l'action de Wess-Zumino-Witten qui fut en un certain sens à l'origine de la théorie des cordes, ou alors "locales", purement algébriques, et se ramenant à des classes de cohomologie de certains groupes ou algèbres de Lie de dimension infinie. Ces défauts apparaissent lors du passage"**classique**" $\to$ "**quantique**" et sont intrinsèquement liés à la quantification. Un exemple typique de cette situation est le suivant : au niveau classique on a un homomorphisme

$$\{\phi(f), \phi(g)\} = \phi(\{f, g\})$$

dont la quantification présente un défaut à être un homomorphisme

$$[\widehat{\phi}(f), \widehat{\phi}(g)] = \widehat{\phi}([f, g]) + \mathrm{Id}\ c(f, g)$$

faisant ainsi apparaître un cocycle c à valeurs scalaires. Retracer l'histoire des anomalies pourrait faire l'objet d'une monographie entière; nous en indiquerons seulement les principales étapes, en développant les points en relation directe avec le cocycle de Virasoro. Dès les années 50 Julian Schwinger mit en évidence un phénomène d'anomalies, dans le cadre de l'électrodynamique quantique, pour l'étude théorique de la désintégration du π^0 (méson-pi ou pion) en photons ; l'anomalie qui apparaît dans le calcul des propagateurs peut s'interpréter comme une singularité dans un calcul de distributions (produit de deux distributions de Dirac) ou comme un défaut d'homomorphisme mettant en évidence un cocycle central, le groupe sous-jacent étant le groupe de jauge de l'électrodynamique, soit $C^\infty(X, \mathrm{U}(1))$ pour un espace-temps X. L'étude de ces phénomènes fut ensuite poursuivie,toujours en l'électrodynamique quantique, par R. Jackiw et S. Adler,qui ont créé le terme d'anomalies, ([1] en 1969) . Cependant les théories de Yang-Mills, ou théories de jauge non abéliennes, se développaient fortement pendant les années soixante; le phénomène d'anomalies dans le cadre non abélien fut mis en évidence par S. Adler et D. Bardeen ; c'est aussi vers cette époque qu'au cours de l'un des multiples colloques consacrés à la théorie des groupes en physique, André Lichnérowicz pouvait prophétiser que la physique théorique allait devenir de plus en plus cohomologique.... La théorie générale des anomalies fut élaborée presque simultanément et indépendamment par, dans l'ordre alphabétique, L. Fadeev, R. Stora et B. Zumino . Du point de vue mathématique, il s'agit de classes de cohomologie du groupe de jauge $C^\infty(V, G) = \mathcal{G}$ ou de son algèbre de Lie $C^\infty(V; \mathbf{g}) = \underline{\mathcal{G}}$ (dite algèbre des courants) où G est un groupe compact non abélien. Les articles [39], [13] constituent une approche intéressante et d'accès facile pour un mathématicien ; par exemple dans [39] on voit apparaître le cocycle comme obstruction dans l'écriture de la quantification canonique d'une théorie de jauge. Les formules de [13] peuvent paraître un peu mystérieuses au premier abord, mais c'est un exercice instructif que de les transcrire sous une forme algébrico-géométrique plus globale. Prenons par exemple la formule (22)

$$[G^a(x), G^b(y)] = if^{abc}G^c(x)\delta^{(3)}(x-y) + \frac{1}{12i\pi^2}d^{abc}\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j^c(x)\partial_k(\delta^{(3)}(x-y))$$

où f^{abc} désigne les constantes de structure de l'algèbre de Lie, d^{abc} désigne les coefficients du générateur de $H^3(\mathbf{g}, \mathbb{C})$, $\underline{A} = A_j^c(x)e_c dx_j$ désigne le champ de jauge, soit en langage mathématique la forme de connexion. L'espace-temps est de dimension 3 et ε_{ijk} désigne la forme volume. Le terme d'anomalie est le second terme dans le second membre. Dans une écriture globale cette formule nous donne : pour f et g dans $\mathcal{G}$ on a

$$[f, g](x) = [f(x), g(x)] + \frac{1}{12i\pi^2}\int_V T(fdg \wedge d\underline{A})$$

où la forme $T(fdg \wedge \underline{A})$ s'interprète comme

$$T(fdg \wedge \underline{A})(x) = d^{abc}f^a(x)dg^b(x) \wedge dA^c(x).$$

En notant $\mathcal{C}$ l'espace des champs de jauges et $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{C}$, on peut considérer cette anomalie comme un 2-cocycle à valeurs dans $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}} \times \underline{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f, g &\longrightarrow c(f, g) \end{aligned}$$

où $c(f, g)$ est défini par $c(f, g)(\underline{A}) = \int_V T(fdg \wedge \underline{A})$.

Ces résultats sont curieusement analogues et presque contemporains des calculs cohomologiques de $\mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ que nous avons mentionnés plus haut ; ils sont en tout cas strictement indépendants et l'analogie ne semble pas avoir été remarquée à l'époque. Un peu plus tard, Mickelsson en a donné une présentation plus analytique, en terme de seconde quantification, permettant de trouver l'anomalie à partir du cocycle universel du groupe linéaire restreint ; pour chaque connexion $A \in \mathcal{C}$, on a un espace de Fock fermionique $\mathcal{F}_A$ associé, construit à partir des solutions de l'équation de Dirac pour A ; les transformations de jauge agissent simultanément sur la connexion et sur l'espace de Fock et c'est ce qui fait toute la difficulté de ces théories de jauge. On en déduit une représentation $\underline{\mathcal{G}} \to \mathbf{gl}_{\text{res}}(\mathcal{H})$ et l'image réciproque du cocycle (9) sur $\mathbf{gl}_{\text{res}}$ nous donne le cocycle de $\underline{\mathcal{G}}$. Ce cocycle est connu dans la littérature sous le nom de cocycle de Mickelsson-Rajeev [27] lorsque la dimension de l'espace-temps est égale à 3. C'est un habillage analytique du cocycle de Faddeev déjà évoqué. On peut mentionner en outre que ce cocycle peut encore s'exprimer en terme d'opérateurs pseudo-différentiels et du résidu de Wodzicki. Un exposé très clair de tous ces résultats est détaillé dans la thèse de C. Ekstrand ([12]). Nous allons maintenant mentionner brièvement un travail de G. Segal intitulé “Faddeev's anomaly in Gauss's law”, très intéressant mais hélas non publié ; G. Segal y donne l'analyse topologique de ces anomalies en théorie de jauge. Les espaces de Fock fermioniques forment un fibré sur l'espace des connexions $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ avec $\pi^{-1}(A) = \mathcal{F}_A$. Le groupe de jauge opère naturellement et on a une projection des espaces quotients $\mathcal{F}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$. L'espace des états physiques est alors l'espace des sections de ce “fibré” ; ce n'est pas un véritable fibré en variétés de dimension infinie à cause des singularités de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}$ (voir par exemple les travaux de Singer [37]). G. Segal considère ensuite le projectifié $\mathcal{P}$ du fibré de Fock $\mathcal{F}$, et il en déduit un fibré $\mathcal{P}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$ de fibre $P(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe ; cet espace $P(\mathcal{H})$ est isomorphe à un projectif complexe infini $\mathbb{C}P(\infty)$ donc est topologiquement un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Z},2)$; la projection $\mathcal{P}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$ est donc caractérisée par une classe entière $\widetilde{c} \in H^3_{\mathrm{top}}(\mathcal{C}/\mathcal{G},\mathbb{Z})$. L'auteur montre ensuite par un argument très subtil, du type théorème de Van-Est, la relation entre cette classe topologique et le cocycle de Faddeev : on a une application $H^3_{\mathrm{top}}(\mathcal{C}/\mathcal{G},\mathbb{Z}) \xrightarrow{I} H^2(\underline{\mathcal{G}},\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathbb{R}))$ définie naturellement ; soit $\omega \in \Omega^3(\mathcal{C}/\mathcal{G})$ une forme fermée représentant $\widetilde{c}$, elle se relève en une forme fermée $\overline{\omega} \in \Omega^3(\mathcal{C})$. L'espace $\mathcal{C}$ étant convexe, donc acyclique, il existe $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{C})$ telle que $d\alpha = \overline{\omega}$; la classe $I(\widetilde{c})$ va alors se définir par

$$I(\widetilde{c})(X,Y)(A) = \overline{\omega}_A(\theta_X(A),\theta_Y(A)) \tag{11}$$

où $\theta_X(A)$ désigne l'action infinitésimale du courant X sur la connexion A ; en d'autres termes, $\theta_X(A) = dX + [X,A]$. G. Segal montre enfin que $I(\widetilde{c})$ s'identifie au cocycle de Faddeev. Nous nous sommes quelque peu attardé sur ce sujet car il est très instructif pour comprendre les anomalies, et aussi parce que l'article correspondant n'est pas publié. Mais ceci nous éloigne, en apparence tout au moins, du cocycle de Virasoro proprement dit... C'est maintenant qu'il faut parler des **modèles duaux**, plutôt oubliés de nos jours, mais qui eurent leur heure de gloire dans les années 70 et se développèrent simultanément et en interaction (si l'on peut dire) avec les diverses anomalies.

Indiquons brièvement l'idée de départ de cette théorie des modèles duaux, au sein de laquelle est apparue l'algèbre de Virasoro en physique. Dans l'étude des interactions de deux particules lourdes ("hadrons") représentée par un diagramme du type suivant (1 a.), soit $P_1 + P_2 \to P_3 + P_4$; l'idée des modèles duaux consiste alors à considérer simultanément ce diagramme comme celui de l'interaction $P_2 + P_3 \to P_1 + P_4$, soit (1 b.).

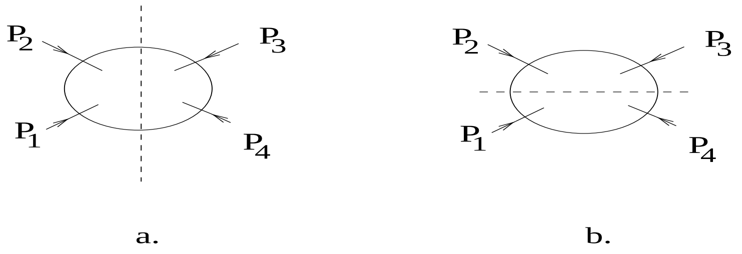

FIG. 1 –

La loi de conservation de l'impulsion donne $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$ et on en déduit les variables d'énergie ("de Mandelstam")

$$S = (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 \qquad t = (P_2 + P_3)^2 = (P_1 + P_4)^2.$$

La fonction d'amplitude $A(S, t)$ est alors une fonction analytique de S et de t ; et l'on voit apparaître des phénomènes de résonance, d'où le nom de "dual resonance models" pour ces théories. Du point de vue phénoménologique, ces résonances apparaissaient comme de nouvelles particules hadroniques, et leur nombre semblait très grand. Citons l'introduction du livre de Frampton[14] : *"In the 1960's, one of the mysteries in strong interaction physics was the enormous proliferation of strongly interacting particles of hadrons. Hadronic resonances seemed to exist with rather high spin... the resonances were so numerous that it was not plausible that they were all fundamental..."*. Un exemple typique de telles interactions est la désintégration baryon-antibaryon (par exemple neutron-antiproton) en trois mésons π([36]). L'analyse complexe a pu fournir des modèles analytiques pour la théorie ; ces modèles présentent une symétrie de jauge qui s'exprime en terme d'opérateurs : les célèbres opérateurs L_n sont ainsi apparus pour la première fois en physique dans l'article de Virasoro [41] très souvent cité mais rarement lu. Ces opérateurs s'expriment comme somme quadratique d'oscillateurs, comme pour les représentations dans l'espace de Fock bosonique (voir [21]). La propriété d'algèbre de Lie, sans le terme central, autrement dit $[L_n, L_m] = (m - n)L_{m+n}$ a été découverte dans le contexte physique par S. Fubini et G. Veneziano [16].

La mise en évidence du terme central dans cette situation est attribuée par P. Ramond à Joe Weiss et Louis Clavelli [34]. Peu de temps après est apparue l'algèbre de Neveu-Schwarz [31] avec la dualité bosons-fermions... Nous n'allons pas retracer toute cette page glorieuse de l'histoire de la physique contemporaine, mais mentionnons cependant que les premiers modèles de cordes et de supercordes sont issus de ces modèles duaux : ce furent le modèle de Veneziano fondé sur les fonctions eulériennes comme fonctions d'amplitude (1968), puis la corde bosonique de Nambu (1970) dans laquelle la géométrie sous-jacente, avec l'action de $\mathrm{Diff}(S^1)$, était explicitée pour la première fois, les résonances apparaissant comme celles des vibrations de la "corde". La suite de l'histoire est longue, riche en rebondissements passionnants, et n'est certainement pas encore achevée ; voir par exemple les introductions de [22] et [18]. On peut signaler au passage l'apparition de **l'anomalie conforme**, dite aussi anomalie de Virasoro : la théorie des cordes bosoniques n'est invariante par une transformation conforme de la métrique que si la dimension de l'espace-temps est égale à 26. Le résultat s'obtient par un calcul explicite de la charge centrale ([18], p.130) pour une certaine représentation de l'algèbre de Virasoro ; ce résultat fut montré par Polyakov vers 1980 par des techniques d'intégrales de chemin ; ce fut la première mise en évidence de la mystérieuse condition de dimension $d = 26$, que l'on retrouve constamment autour des cordes bosoniques, via les représentations de l'algèbre de Virasoro, mais aussi via des modèles du type quantification géométrique (voir Bowick et Rajeev [5]).

En manière de conclusion, nous allons expliquer la relation entre l'algèbre de Virasoro et l'effet Casimir. Ce dernier est une manifestation de l'énergie du vide ; il est classique que la quantification canonique d'un oscillateur harmonique donne comme valeur du hamiltonien

$$H = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{12}$$

où ω est la fréquence et n le nombre de particules, et donc $H \neq 0$ même si $n = 0$. En 1948, H.B.G. Casimir déterminait la force d'attraction entre deux plaques conductrices parallèles, par un calcul audacieux mais classique dans ce genre de physique : l'énergie de la "boîte" apparaît comme la différence entre deux quantités infinies, l'énergie du vide calculée suivant la formule (12) et celle du vide perturbé par la présence des plaques (voir [6]). La confirmation expérimentale est due à Sparnaay en 1958 ([38]). Ce phénomène a trouvé une autre interprétation dans le cadre de la théorie des champs conformes en dimension 2, dans le travail de Blöte, Cardy et Nightingale [4], et c'est là qu'intervient l'algèbre de Virasoro. Dans les théories de champs conformes en dimension 2, les transformations du tenseur d'énergie impulsion s'écrivent sous la forme

$$T(z)dz^2 = T'(z')(dz')^2 + \frac{c}{12}\{z', z\}dz^2 \tag{13}$$

où $\{z', z\}$ désigne la dérivée Schwarzienne de la transformation $z' = \varphi(z)$ (voir [10] Tome II p.103). Dans notre formalisme géométrique en terme de champs de tenseurs, ceci s' écrit :

$$\varphi^*(Tdz^2) = (T\circ\varphi)(\varphi')^2dz^2 + \frac{c}{12}S(\varphi)dz^2. \tag{14}$$

Il s'agit simplement de la complexification de la formule de l'action coadjointe de $\mathrm{Diff}(S^1)$ sur le dual régulier de son algèbre de Lie.

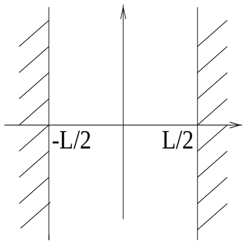

FIG. 2 –

Pour l'étude de l'effet Casimir, on considère une bande de largeur L dans le plan complexe de la variable u et la transformation conforme $z = \exp\left(\frac{2i\pi u}{L}\right)$ de cette bande sur le plan des z. La formule (13) donne dans ce cas :

$$T_{(\text{bande})}(u)(du)^2 = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\left(T(z)z^2 - \frac{c}{24}\right)(dz)^2.$$

L'invariance par translation montre que les valeurs moyennes sur le plan sont nulles donc $< T(z) >= 0$. On en déduit $< T_{(\text{bande})}(u) >= \frac{c}{24}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ ([11] p.105). Itzykson et Drouffe interprètent ce résultat de la façon suivante : “

... ceci nous permet d'interpréter l'anomalie comme un effet Casimir, c'est-à-dire un déplacement de l'énergie libre comme conséquence de la géométrie finie...". Nous mentionnerons une question ouverte pour terminer: la comparaison avec la formule obtenue par Casimir [6] nous suggère qu'il serait intéressant de pouvoir faire directement le lien entre l'énergie de l'oscillateur et la valeur de la charge centrale pour une représentation appropriée de l'algèbre de Virasoro.

Références

[1] Adler, S. - Bardeen, W. A. Physical Review, **184** (1969), 1517

[2] Berezin, F. *Methods of second quantization.* Academic Press(1966).

[3] Bloch, S. *The dilogarithm and extensions of Lie algebras.* Algebraic K-theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), Lecture Notes in Math., **854**, Springer-Verlag (1981), pp. 1–23.

[4] Blote, H.W.J. - Cardy, J.L. - Nightingale, M.P. *Conformal invariance,the central charge,and universal finite-size amplitudes at criticality.* Phys Rev Letters,**56** (1986), No. 7, pp 742–745.

[5] Bowick, M.J. - Rajeev, S.G. *The complex geometry of string theory and loop space.* Proceedings of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory. **11**. Frontiers in Particle Theory, World Sci. Publishing(1988), pp101–144.

[6] Casimir, H.B.G. *On the attraction between two perfectly conducting plates.* Proc.K.Ned.Akad.Wet., **51**(1948),793.

[7] Chevalley, C. - Eilenberg, S. *Cohomology theory of Lie groups and Lie Algebras.* Trans. AMS, **63** (1948), 85–124.

[8] Connes, A. *Géométrie non commutative.* InterEditions(1990).

[9] Connes, A. *Noncommutative geometry.* Academic Press Inc (1994).

[10] Itzykson, C. - Drouffe, J.-M. *Théorie statistique des champs (2 vol)* InterEditions(1989).

[11] Itzykson, C. - Drouffe, J.-M. *Statistical field theory. Vol.2. Strong coupling, Monte Carlo methods, conformal field theory, and random systems.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge,1989. pp. i–xvi, 405–810 and Ii–Ivii.

[12] Ekstrand,C. *Schwinger terms from external field problems.* These, Kungl Tekniska Hogskolan, Stockholm (1999).

[13] Faddeev, L. D. *Operator anomaly for the Gauss law.* Phys. Lett. B, **145** (1984), No. 1-2, 81–84.

[14] Frampton, P.H. *Dual resonance models and superstrings.* World Scientific (1986).

[15] Friedrichs, K.O. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields.* Interscience Publishers, Inc. (1953).

[16] Fubini, S. - Veneziano, G. *Algebraic treatment of subsidiary conditions in dual resonance models.* Ann. Physics (N.Y.) **63** (1971),No12, p. 12–27.

[17] Fuks, D.B. - Gel'fand, I.M. *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle.*Funkcional. Anal. i Priložen., **2**(1968), No. 4, 92–93. *The cohomologies of the Lie algebra of the vector fields in a circle.* Functional Analysis and its Applications, **2** (1968), No 4, 342–343.

[18] Green, M. - Schwarz, J. - Witten, E. *Supertring theory.* Vol. 1 et 2, Cambridge University Press (1987).

[19] Hilton, P. - Stammbach, U. *Homological Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, **4**, Springer-Verlag (1997).

[20] Kac, V.G. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Third edition. Cambridge University Press (1990).

[21] Kac, V.G. - Raina, A. *Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras.* Advanced Series in Math. Phys.,**2**, World Scientific (1987).

[22] Kaku, M. *Introduction to superstrings and M-theory.* Springer-Verlag (1999).

[23] Kassel, C. - Loday, J.-L. *Extensions centrales d'algèbres de Lie.* Ann. Inst. Fourier , **32** (1982), No. 4, 119–142.

[24] Kervaire, M.A. *Multiplicateurs de Schur et K-théorie.* 1970 Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham), Springer-Verlag (1970),pp 212–225.

[25] Koszul, J-L *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie.* Bull. SMF, **78** (1950), 65–127.

[26] Lepowsky, J. *Generalized Verma modules, loop space cohomology, and McDonald type identities.* Ann. Sci. ENS, **12** (1979), 169–234.

[27] Mickelsson, J. - Rajeev, S.G. *Current algebras in $d+1$-dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmannians.* Comm.Math. Phys., **116** (1988), No. 3, 365–400.

[28] Milnor, J. *Algebraic K-Theory.* Annals of Mathematics Studies,**72**, Princeton University Press (1971).

[29] Moody, R.V. *Euclidean Lie algebras.* Canad. J. Math., **21** (1969), 1432–1454

[30] Neretin, Y. *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups.* London Math. Soc.,**16**, Oxford Science Publications (1996).

[31] Neveu, A. - Schwarz, J. H. *Factorizable dual model of pions.* Nucl. Phys. B, **31** (1971), pp 86-112.

[32] Peskin, M. - Schroeder, D. *An introduction to Quantum Field Theory.* Addison-Wesley (1995).

[33] Pressley, A. - Segal, G.B. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Clarendon Press (1988).

[34] Ramond, P. *Comment on the Virasoro group in dual-resonance models.* Lett. Nuovo Cimento (2), **4** (1972), 422–424.

[35] Schur, I. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen.* J. Reine Ang. Math., **127** (1904), 20–40.

[36] Schwinger, J. *Selected papers(1937-1976).* MPAM, **4**, D.Reidel(1979).

[37] Singer, I.M. *Families of Dirac operators with applications to physics.* The mathematical heritage of Elie Cartan (Lyon, 1984), Astérisque, Numéro Hors Série (1985), pp 323–340.

[38] Sparnaay, M.J. *Measurements of attractive forces between flat plates* Physica, **XXIV** (1958) , 751–764.

[39] Stora, R. *Algebraic structure and topological origin of anomalies.* Progress in gauge field theory (Cargèse, 1983), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **115**, Plenum(1984), pp 543–562.

[40] Tate, J. *Residues of differentials on curves.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **1** (1968), pp 149–159.

[41] Virasoro, M. *Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models.* Phys. Rev. D, **1** (1970), No. 10, 2933–2936.

99