VARIÉTÉS DE DRAPEAUX (PAS TROP) QUANTIQUES

CHRISTIAN OHN

Introduction

Ce texte, écrit suite à mon exposé à la *Journée d'Algèbre* de Clermont-Ferrand, le 23 février 2001, esquisse les idées principales de l'article [25].

Rappelons que les groupes quantiques définis par Drinfel′d [12] et Jimbo [16] en 1985 ont beaucoup de propriétés semblables à celles des groupes de Lie simples complexes, leurs analogues classiques. En particulier, Lusztig [23] et Rosso [27] ont montré qu'essentiellement, la théorie des représentations est toujours « la même. »

Or, une construction bien connue des représentations (irréductibles) d'un groupe simple complexes G consiste à partir de la variété des drapeaux associée à G et d'appliquer le théorème de Borel-Weil. Suite à [23, 27], un problème naturel, posé pour la première fois par Manin [24], est donc de construire des analogues quantiques des variétés de drapeaux.

Pendant les dix dernières années, ce problème a été traîté par de nombreux auteurs, de divers points de vue ; voir par exemple [1, 8, 11, 13, 14, 17, 19, 22, 28, 30, 31, 32]. Ces différentes approches, souvent riches en contenu, ne font cependant pas apparaître de véritable objet géométrique.

Or, cette même période a vu le développement d'une approche de la géométrie algébrique (projective) non commutative, initiée par Artin, Tate et Van den Bergh ; voir par exemple [3, 4, 5, 6, 7, 9, 18, 21, 29, 33, 34, 35].

Le but de l'article [25] est d'introduire une notion de variété de drapeaux pour les groupes quantiques, dans l'esprit de cette géométrie projective non commutative. En particulier, cette approche mettra en évidence une *vraie* variété (munie de structures supplémentaires) – c'est le sens du « pas trop » dans le titre.

Pour les besoins de ce texte-ci (et de mon exposé à Clermont), je me limiterai au groupe $\mathrm{SL}(n)$, où les résultats peuvent souvent être décrits de manière plus simple et plus concrète.

1. Variétés projectives

Soient V un espace vectoriel et $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé. Toute base $(x_0, \ldots, x_n)$ de V^* définit des *coordonnées homogènes* sur $\mathbb{P}(V)$. Contrairement à la situation affine, un polynôme en les x_i ne peut plus être vu comme fonction sur $\mathbb{P}(V)$, mais il subsiste quand-même un élément de cet aspect fonctionnel : si un polynôme en les x_i est *homogène*, on peut toujours parler des points de $\mathbb{P}(V)$ où il *s'annule*.

On définit alors une sous-variété de $\mathbb{P}(V)$ comme ensemble des zéros d'une famille de polynômes. Inversement, étant donné une sous-variété $X \subset \mathbb{P}(V)$, on définit l'*algèbre des coordonnées homogènes* de X comme le quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbf{C}[x_0, \ldots, x_n]$ par l'idéal engendré par tous les polynômes homogènes qui

Exposé à la Journée d'Algèbre, Clermont-Ferrand, le 23 février 2001.

s'annulent sur X. Du fait de cette homogénéité, la graduation naturelle des polynômes induit une graduation bien définie sur l'algèbre quotient.

On peut aussi construire l'algèbre des coordonnées homogènes d'une sous-variété $X \subset \mathbb{P}(V)$ sans utiliser les coordonnées homogènes.

En effet, considérons le fibré en droites au-dessus de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ obtenu en mettant, au-dessus de chaque point de $\mathbb{P}(V)$, la droite de V qu'*est* ce point – par définition-même de $\mathbb{P}(V)$. D'habitude, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ le dual de ce fibré.

Soit $\mathcal{L}$ la restriction de $\mathbb{P}(V)$ à X. L'algèbre des coordonnées homogènes de X est alors donnée par

$$B(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}),$$

où $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est l'espace des sections (holomorphes) du fibré en droites $\mathcal{L}^{\otimes n}$, la multiplication étant donnée par le produit tensoriel des sections. Noter que cette algèbre *dépend* du choix d'un plongement de X dans un espace projectif (ou, ce qui revient à peu près au même, du choix de $\mathcal{L}$).

2. Variétés multiprojectives

Si l'on se donne un produit $\mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_\ell)$ d'espaces projectifs, on peut considérer un système de coordonnées homogènes dans chacun des facteurs, puis l'algèbre des polynômes en toutes ces coordonnées homogènes. Cette fois, il est plus naturel de la considérer comme algèbre $\mathbf{N}^\ell$-graduée : si l'on note $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$ la « base canonique » de $\mathbf{N}^\ell$, on met les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(V_i)$ en degré ϖ_i.

On définit alors une sous-variété $X \subset \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_\ell)$, ainsi que l'algèbre des coordonnées multihomogènes sur X, de la même manière que plus haut, mais en exigeant partout l'homogénéité par rapport à la $\mathbf{N}^\ell$-graduation.

De plus, il est encore possible de construire cette algèbre de manière intrinsèque : pour tout i, considérons l'application $X \to \mathbb{P}(V_i)$ composée de l'inclusion et de la projection naturelles, puis notons $\mathcal{L}_i$ le pull-back du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(1)$ par cette application. On définit alors

$$B(X, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell) = \bigoplus_{(a_1, \ldots, a_\ell) \in \mathbf{N}^\ell} \Gamma(X, \mathcal{L}_1^{\otimes a_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_\ell^{\otimes a_\ell}).$$

3. Le groupe SL(n) et ses représentations

Soit $\mathrm{SL}(n)$ le groupe des matrices $n \times n$ (à coefficients complexes) de déterminant 1. On sait que $\mathrm{SL}(n)$ est *réductif*, càd. toute représentation de dimension finie de ce groupe se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Pour obtenir toutes les représentations de $\mathrm{SL}(n)$, il suffit donc de classifier celles qui sont irréductibles. Rappelons que celles-ci peuvent être paramétrisées par les $(n-1)$-uples d'entiers naturels ; pour $\lambda \in \mathbf{N}^{n-1}$, notons V_λ la représentation irréductible correspondante. Si $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{N}^{n-1}$, les nombres suivants peuvent a priori être déterminés de manière purement combinatoire :

– la dimension d_λ de V_λ,
– la multiplicité $c_\nu^{\lambda,\mu}$ de V^ν dans la décomposition de $V_\lambda \otimes V_\mu$.

4. La variété des drapeaux

Un *drapeau* dans $\mathbf{C}^n$ est une suite emboîtée

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset \mathbf{C}^n$$

de sous-espaces de $\mathbf{C}^n$, avec $\dim F_k = k$ pour tout k. Il revient au même – et c'est souvent plus commode – de la voir comme suite emboîtée de sous-espaces (linéaires) de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbf{C}^n)$.

On montre que l'ensemble de tous les drapeaux forme une variété algébrique (projective). L'action naturelle de $\mathrm{SL}(n)$ sur $\mathbf{C}^n$ induit une action de $\mathrm{SL}(n)$ sur cette variété, que l'on voit facilement être transitive. De plus, si l'on note $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$, le stabilisateur du drapeau

$$0 \subset \mathrm{Vect}(e_1) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \cdots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}) \subset \mathbf{C}^n$$

est donné par le sous-groupe $B \subset \mathrm{SL}(n)$ des matrices triangulaires supérieures (de déterminant 1). Ainsi, la variété des drapeaux s'identifie au quotient $\mathrm{SL}(n)/B$.

L'un des intérêts de la variété des drapeaux est qu'elle permet de construire toutes les représentations irréductibles (de dimension finie) de $\mathrm{SL}(n)$. Rappelons cette construction. Si $F \subset \mathbf{C}^n$ est un sous-espace de dimension k, soit $f_1, \ldots, f_k$ une base de F. L'élément $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \in \Lambda^k \mathbf{C}^n$ est seulement multiplié par un scalaire quand on change de base, donc le point $[f_1 \wedge \cdots \wedge f_k] \in \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbf{C}^n)$ ne dépend pas du choix de cette base, mais uniquement de F. Procédant ainsi pour les sous-espaces de $\mathbf{C}^n$ de toutes les dimensions, on obtient l'application de *Plücker*

$$\mathrm{Pl} : \mathrm{SL}(n)/B \to \mathbb{P}(\mathbf{C}^n) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Lambda^{n-1} \mathbf{C}^n),$$

que l'on montre être injective. De cette manière, on réalise $\mathrm{SL}(n)/B$ comme variété multiprojective.

Théorème 4.1 (Borel-Weil pour $\mathrm{SL}(n)$)**.** *Pour tout $\lambda \in \mathbf{N}^{n-1}$, la représentation irréductible V_λ est donnée par le sous-espace de degré λ dans l'algèbre des coordonnées multihomogènes sur $\mathrm{SL}(n)/B$.*

C'est pour cela que cette algèbre est souvent appelée l'*algèbre modèle* dans la théorie des représentations de $\mathrm{SL}(n)$.

On peut aussi procéder dans l'autre sens et construire l'algèbre modèle à partir des représentations de $\mathrm{SL}(n)$. D'abord, on considère l'espace vectoriel $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{N}^{n-1}} V_\lambda$. Puis on utilise le fait que $V_\lambda \otimes V_\mu$ contient $V_{\lambda+\mu}$ avec multiplicité 1, d'où une application $m_{\lambda,\mu} : V_\lambda \otimes V_\mu \to V_{\lambda+\mu}$, unique à un facteur $a_{\lambda,\mu}$ près. En recollant tous les $m_{\lambda,\mu}$, on obtient une multiplication $m : M \otimes M \to M$, et on montre qu'en calibrant convenablement tous les facteurs $a_{\lambda,\mu}$, cette multiplication devient associative.

5. Algèbres graduées et modules-point

La construction décrite ci-dessous, introduite dans [4], permet d'associer des données géométriques (projectives) à certaines algèbres $\mathbf{N}$-graduées *non* commutatives.

Définition 5.1. Soit A une algèbre $\mathbf{N}$-graduée. Un *module-point* de A est un A-module à droite $\mathbf{N}$-gradué, P, tel que

(a) $\dim P_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$,

(b) P est cyclique.

La terminologie est justifiée par le cas commutatif : si A est l'algèbre des coordonnées homogènes d'une variété projective $X \subset \mathbb{P}(V)$, alors les (classes d'isomorphisme de) modules-point de A sont en bijection avec les points de X. La condition (a) de la définition est inspirée du fait qu'un point de $\mathbb{P}(V)$ correspond à une droite de V, dont l'algèbre des fonctions est l'algèbre des polynômes à une variable, donc de dimension 1 en chaque degré. La condition (b) est simplement une condition de non-dégénérescence.

Toutefois, même si A n'est pas commutative, on peut toujours espérer paramétriser ses modules-point par les points d'une variété projective.

Exemple 5.2. Fixons $q \in \mathbf{C}^*$ et soit A l'algèbre engendrée par trois éléments x, y, z, soumis aux trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= q\,yx, \\ xz &= q\,zx, \\ yz &= q\,zy. \end{aligned}$$

Pour $q = 1$, on retrouve l'algèbre des polynômes à trois variables ; supposons donc dans la suite que $q \neq 1$.

Soit $P = \bigoplus_n P_n$ un module-point de A. Par la condition (a) ci-dessus, on a $P_n = \mathbf{C}e_n$, où $e_n \in P_n$ est quelconque (non nul). On a alors

$$\begin{aligned} e_n.x &= x_{n+1}e_{n+1}, \\ e_n.y &= y_{n+1}e_{n+1}, \\ e_n.z &= z_{n+1}e_{n+1}, \end{aligned}$$

où $x_n, y_n, z_n \in \mathbf{C}$ pour tout n. La condition (b) se traduit alors par : $(x_n, y_n, z_n) \neq (0,0,0)$ pour tout n. De plus, remplacer P par un module isomorphe ne fait que multiplier (x_n, y_n, z_n) par une constante ; il est donc naturel d'interpréter ce triple comme le point de coordonnées homogènes $(x_n : y_n : z_n)$ dans le projectif $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}(\mathbf{C}^3)$.

Les constantes de structure x_n, y_n, z_n doivent être compatibles avec les relations qui définissent A, d'où

$$\begin{aligned} x_n y_{n+1} &= q\,y_n x_{n+1}, \\ x_n z_{n+1} &= q\,z_n x_{n+1}, \\ y_n z_{n+1} &= q\,z_n y_{n+1}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} -qy_n & x_n & 0 \\ -qz_n & 0 & x_n \\ 0 & -qz_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \neq (0,0,0)$, cette matrice doit être singulière, d'où

$$\begin{vmatrix} -qy_n & x_n & 0 \\ -qz_n & 0 & x_n \\ 0 & -qz_n & y_n \end{vmatrix} = q(1-q)\,x_n y_n z_n = 0,$$

càd. le point $(x_n : y_n : z_n)$ se trouve sur la courbe $E \subset \mathbb{P}^2$ d'équation $xyz = 0$ (on abuse ici des notations, en désignant par les mêmes lettres les générateurs de A et les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^2$). Cette courbe est la réunion de trois droites non concourantes.

De plus, le point $(x_n : y_n : z_n)$ détermine entièrement le point $(x_{n+1} : y_{n+1} : z_{n+1})$: en effet, on vérifie facilement que

$$
\begin{aligned}
z_n = 0 &\implies (x_{n+1} : y_{n+1} : z_{n+1}) = (x_n : q\, y_n : 0),\\
y_n = 0 &\implies (x_{n+1} : y_{n+1} : z_{n+1}) = (x_n : 0 : q\, z_n),\\
x_n = 0 &\implies (x_{n+1} : y_{n+1} : z_{n+1}) = (0 : y_n : q\, z_n).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

On obtient ainsi une application $\sigma : E \to E$, qui peut se voir géométriquement de la manière suivante : si l'on identifie la droite $z = 0$ à $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ en posant $(1 : 0 : 0) = 0$ et $(0 : 1 : 0) = \infty$, alors σ (restreinte à cette droite) est l'homothétie de rapport q ; de même pour les droites $y = 0$ et $x = 0$.

L'exemple suivant montre pourquoi la courbe obtenue est notée E (et aussi pourquoi Tate est dans le coup).

Exemple 5.3. Fixons $a, b, c \in \mathbf{C}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit A l'algèbre (dite de *Sklyanin*) engendrée par trois éléments x, y, z, soumis aux trois relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
a\, xy + b\, yx &= c\, z^2,\\
a\, yz + b\, zy &= c\, x^2,\\
a\, zx + b\, xz &= c\, y^2.
\end{aligned}
$$

Par le même calcul que dans l'exemple précédent, on obtient la courbe E d'équation

$$abc(x^3 + y^3 + z^3) = (a^3 + b^3 + c^3)xyz,$$

qui est une courbe elliptique (sauf si $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$), càd. une courbe cubique non singulière dans $\mathbb{P}^2$.

Cet exemple constitue le succès initial du travail de Artin, Tate et Van den Bergh : en utilisant l'information géométrique contenue dans la courbe elliptique E, ils ont pu montrer notamment que les algèbres de Sklyanin sont noethériennes, et que leur série de Hilbert est celle de l'algèbre des polynômes à trois variables. Jusqu'à présent, on ne connait aucune preuve purement algébrique de ces faits.

Exemple 5.4. Considérons l'algèbre de Weyl A_1, engendrée par deux éléments x, y, soumis à la relation $xy - yx = 1$. Introduisons un troisième générateur z, commutant à x et à y, et « homogénéisons » la relation ci-dessus, d'où

$$
\begin{aligned}
xy - yx &= z^2,\\
xz &= zx,\\
yz &= zy.
\end{aligned}
$$

Cette fois, on obtient la courbe E d'équation $z^3 = 0$, càd. la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2$, comptée trois fois. De plus, si l'on considère E comme *variété*, alors $\sigma : E \to E$ est l'identité, mais pas si l'on considère E comme *schéma* (et que l'on tient donc compte des multiplicités) : sans rentrer dans les détails techniques, disons simplement que σ agit « infinitésimalement » dans une « direction transverse » à la droite $z = 0$.

L'algèbre de Weyl A_1 est souvent considérée comme l'exemple-type d'algèbre « vraiment » non commutative : on a beau considérer A_1 comme analogue non commutatif de l'algèbre des fonctions sur $\mathbf{C}^2$, on ne voit pas très bien ce qui subsisterait de la géométrie du plan affine : pas de caractères, pas d'idéaux, etc. L'étude faite ici permet de comprendre un peu pourquoi il en est ainsi : la géométrie est entièrement concentrée à l'infini !

Définition 5.5. Soit $M = \bigoplus_n M_n$ un module gradué d'une algèbre graduée A. Alors le module *décalé* $M[1]$ est défini par $M[1]_n = M_{n+1}$ pour tout n. (Donc on écarte M_0 et on dimninue tous les degrés d'un cran.)

Il est immédiat que le décalé d'un module-point en est encore un. Dans l'exemple 5.2, on voit que l'opération de décalage $P \mapsto P[1]$ s'identifie en fait à l'automorphisme $\sigma : E \to E$. (Ce phénomène est général.)

6. Algèbres de coordonnées homogènes tordues

On se donne maintenant une variété projective X, un automorphisme $\sigma : X \xrightarrow{\sim} X$ et un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X. Notons $\mathcal{L}^\sigma$ le pull-back de $\mathcal{L}$ par σ.

On définit alors [6] l'algèbre des coordonnées homogènes *tordues* par

$$B(X, \sigma, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\sigma \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}^{\sigma^{n-1}}),$$

où cette fois, on pose $\alpha\beta = \alpha \otimes \beta^{\sigma^m}$ pour toutes sections α de degré m et β de degré n. (Pour $\sigma = \mathrm{id}$, on obtient l'algèbre des coordonnées homogènes usuelle).

Si A est l'une des trois algèbres considérées dans le paragraphe 5 (ou, plus généralement, une algèbre régulière de dimension 3 au sens de Artin-Schelter), soit $E \subset \mathbb{P}^2$ la courbe paramétrisant ses modules-point, $\sigma : E \to E$ l'opérateur de décalage. $\mathcal{L}$ la restriction à E du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. On peut alors reconstruire une algèbre graduée $B(E, \sigma, \mathcal{L})$ comme décrit ci-dessus.

Cette algèbre n'est pas isomorphe à l'algèbre A de départ : on obtient seulement une surjection canonique $A \to B(E, \sigma, \mathcal{L})$. L'idée est que E n'est qu'une courbe de degré 3 dans $\mathbb{P}^2$, et non $\mathbb{P}^2$ tout entier, et que le polynôme qui définit cette courbe donne lieu à une section de degré 3 qui s'annule sur E, mais pas sur $\mathbb{P}^2$ tout entier. A priori, il n'est pas clair comment la présence de σ va « tordre » cette idée, mais on montre dans [4] que le noyau de la surjection $A \to B(E, \sigma, \mathcal{L})$ est effectivement engendré par un élément $g \in A$, homogène de degré 3 et normalisant, de sorte qu'on obtient un isomorphisme $A/(g) \xrightarrow{\sim} B(E, \sigma, \mathcal{L})$.

Ainsi, A est le *revêtement quadratique* de $B(E, \sigma, \mathcal{L})$, càd. l'algèbre obtenue en « laissant tomber » toutes les relations homogènes de degré supérieur à 2.

7. Groupes quantiques et modules-drapeau

Soit $\mathrm{U}_q^{\mathrm{DJ}}(\mathfrak{sl}(n))$ l'analogue quantique de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$ défini par Drinfel'd [12] et Jimbo [16], où $q \in \mathbf{C}^*$ (voir par exemple [15] pour un exposé détaillé). On sait [23, 27] que si q n'est pas racine de l'unité, alors la théorie des représentations de $\mathrm{U}_q^{\mathrm{DJ}}(\mathfrak{sl}(n))$ est « à peu près la même » que celle de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(n))$ (càd. celle du groupe $\mathrm{SL}(n)$) : en particulier, il existe toujours une famille $\{V_\lambda \mid \lambda \in \mathbf{N}^{n-1}\}$ de représentations irréductibles vérifiant

- $\dim V_\lambda = d_\lambda$,
- $V_\lambda \otimes V_\mu \simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbf{N}^{n-1}} c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{N}^{n-1}$ (les entiers d_λ et $c_{\lambda,\mu}^\nu$ étant supposés définis de manière purement combinatoire, cf. paragraphe 3).

En particulier, il est toujours possible de définir une algèbre modèle $M_q = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{N}^{n-1}} V_\lambda$, mais celle-ci sera non commutative, essentiellement pour la raison suivante : en situation classique, $V_\lambda \otimes V_\lambda$ se décompose en somme directe du carré symétrique $S^2 V_\lambda$ et du carré extérieur $\Lambda^2 V_\lambda$, et ces deux sous-espaces sont $\mathrm{SL}(n)$-invariants. Or, la copie de $V_{2\lambda}$ contenue dans $V_\lambda \otimes V_\lambda$ se trouve en fait dans $S^2 V_\lambda$, de sorte que $\Lambda^2 V_\lambda$ est entièrement contenu dans le noyau de la multiplication $V_\lambda \otimes V_\lambda \to V_{2\lambda}$: ainsi, c'est le fait de quotienter systématiquement par tous les carrés extérieurs qui rend l'algèbre M commutative. En situation quantique, par contre, les sous-espaces $S^2 V_\lambda$ et $\Lambda^2 V_\lambda$ ne seront plus invariants (essentiellement du fait que la comultiplication Δ sur $\mathrm{U}_q^{\mathrm{DJ}}(\mathfrak{sl}(n))$ n'est plus cocommutative), et le raisonnement précédent ne s'applique plus. C'est ce qui explique (de manière un peu vague) la non-commutativité de M_q.

L'idée est maintenant d'associer à M_q une version multigraduée des modules-point.

Définition 7.1. Un *module-drapeau* de M_q est un M_q-module à droite $\mathbf{N}^{n-1}$-gradué, F, tel que

(a) $\dim F_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbf{N}^{n-1}$,

(b) F est cyclique.

Cette terminologie est justifiée par le cas commutatif : on montre (à l'aide du théorème de Borel-Weil) que les classes d'isomorphisme de modules-drapeau de M sont en bijection avec les drapeaux dans $\mathbf{C}^n$.

Même en situation non commutative, on peut encore espérer paramétriser les modules-drapeau de M_q par les points d'une sous-variété

$$E \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{\binom{n}{n-1}-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

(où la dimension du $i^{\text{ème}}$ facteur est $\binom{n}{i} - 1$). Noter que l'on dispose maintenant de plusieurs décalages : si $\varpi_1, \ldots, \varpi_{n-1}$ est la « base canonique » de $\mathbf{N}^{n-1}$, on peut définir, pour tout i, l'opération $F \mapsto F[\varpi_i]$, que l'on peut voir comme un automorphisme $\sigma_i : E \to E$. Visiblement, les σ_i commutent deux à deux.

8. Algèbres de coordonnées multihomogènes tordues

D. Chan [10] a formulé une version multigraduée des algèbres de coordonnées homogènes tordues, en partant d'une variété X, de ℓ automorphismes $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ de X et de ℓ fibrés en droites $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell$. À la lumière du paragraphe précédent, il y a lieu de supposer que les σ_i commutent deux à deux.

En situation $\mathbf{N}$-graduée, les éléments de degré n de $B(X, \sigma, \mathcal{L})$ étaient donnés par les sections du fibré $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\sigma \otimes \times \otimes \mathcal{L}^{\sigma^{n-1}}$. Notons que ces fibrés vérifient la relation de récurrence $\mathcal{L}_{1+n} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_n^\sigma$ (avec $\mathcal{L}_0$ le fibré trivial). En situation multigraduée, on voudrait donc de même définir des fibrés $\mathcal{L}_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{N}^\ell$, vérifiant les relations de récurrence

$$\mathcal{L}_{\varpi_i + \lambda} = \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_\lambda^{\sigma_i}, \qquad i = 1, \ldots, \ell$$

(toujours avec $\mathcal{L}_0$ le fibré trivial). Clairement, $\mathcal{L}_{\varpi_i} = \mathcal{L}_i$ pour tout i, mais en degré 2, il y a un problème de compatibilité, car on devrait avoir

$$\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j^{\sigma_i} = \mathcal{L}_{\varpi_i + \varpi_j} = \mathcal{L}_{\varpi_j + \varpi_i} = \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_i^{\sigma_j}.$$

Il faudra donc demander qu'il existe un isomorphisme de fibrés

$$R_{ij} : \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j^{\sigma_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_i^{\sigma_j}.$$

Mais alors, en degré 3, les R_{ij} induisent deux isomorphismes entre $\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j^{\sigma_i} \otimes \mathcal{L}_k^{\sigma_i \sigma_j}$ et $\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_j^{\sigma_k} \otimes \mathcal{L}_i^{\sigma_k \sigma_j}$: si l'on veut que $\mathcal{L}_{\varpi_i + \varpi_j + \varpi_k}$ soit « raisonnablement » bien défini, il faudra donc que ces deux isomorphismes coïncident, càd.

$$(R_{jk} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes R_{ik}^{\sigma_j})(R_{ij} \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes R_{ij}^{\sigma_k})(R_{ik} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes R_{jk}^{\sigma_i}). \tag{8.1}$$

Les arguments usuels concernant ce genre de relations des tresses permettent alors de montrer qu'en degré quelconque, $\mathcal{L}_\lambda$ est « raisonnablement » bien défini, sans condition supplémentaire sur les R_{ij}. Plus précisément, si λ se décompose de deux manières comme somme des ϖ_i, disons $\lambda = \varpi_{i_1} + \cdots + \varpi_{i_k}$ et $\lambda = \varpi_{j_1} + \cdots + \varpi_{j_k}$, considérons les deux « incarnations » correspondantes de $\mathcal{L}_\lambda$, à savoir $\mathcal{L}_{i_1} \otimes \mathcal{L}_{i_2}^{\sigma_{i_1}} \otimes \mathcal{L}_{i_3}^{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}} \ldots$ et $\mathcal{L}_{j_1} \otimes \mathcal{L}_{j_2}^{\sigma_{j_1}} \otimes \mathcal{L}_{j_3}^{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}} \ldots$. Soit π une permutation de $\{1, \ldots, k\}$ telle que $j_p = i_{\pi(p)}$ pour tout p : alors toute décomposition de p en produit de transpositions simples (càd. de la forme $(i\, i+1)$) induit un isomorphisme entre les deux incarnations de $\mathcal{L}_\lambda$, construit à l'aide des R_{ij}. La condition (8.1) assure que l'isomorphisme obtenu est indépendant du choix de la décomposition de π (et aussi du choix de π lui-même si l'on prend soin de poser $R_{ii} = \mathrm{id}$ pour tout i).

De cette manière, D. Chan a montré, sous les hypothèses ci-dessus, que l'on peut encore définir une algèbre (associative) $\mathbf{N}^\ell$-graduée par

$$B(X, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{N}^\ell} \Gamma(X, \mathcal{L}_\lambda).$$

(À nouveau, pour $\sigma_1 = \cdots = \sigma_\ell = \mathrm{id}$, on obtient l'algèbre des coordonnées multi-homogènes usuelle.)

9. Variétés de drapeaux quantiques

Voici le résultat principal de [25].

Théorème 9.1. *Il existe une variété E, des automorphismes $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ de E et des fibrés en droites $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell$ sur E, vérifiant les conditions de compatibilité de Chan, et tels que l'algèbre modèle M_q (associée à $\mathrm{U}_q^{\mathrm{DJ}}(\mathfrak{sl}(n))$) soit égale au revêtement quadratique de $B(E, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell)$.*

Conjecture 9.2. *La variété E du théorème ci-dessus est « la plus grande possible, » au sens où ses points paramétrisent* tous *les modules-point de l'algèbre modèle M_q.*

Cette conjecture se vérifie sans peine à la main pour SL(2) et SL(3), et aussi (en prenant son courage à deux mains) pour SL(4).

Nous renvoyons à [25] pour la démonstration du théorème ci-dessus. Nous nous contenterons ici de décrire explicitement la variété E obtenue. En fait, il s'agira d'une sous-variété de la variété des drapeaux (usuelle) $\mathrm{SL}(n)/B$.

Rappelons d'abord deux détails concernant la structure du groupe $\mathrm{SL}(n)$ et de la variété $\mathrm{SL}(n)/B$. D'une part, toute permutation π de $\{1, \ldots, n\}$ peut être vue comme matrice $n \times n$; bien que celle-ci ne soit pas dans $\mathrm{SL}(n)$ quand π est impaire, elle agit naturellement sur la variété des drapeaux.

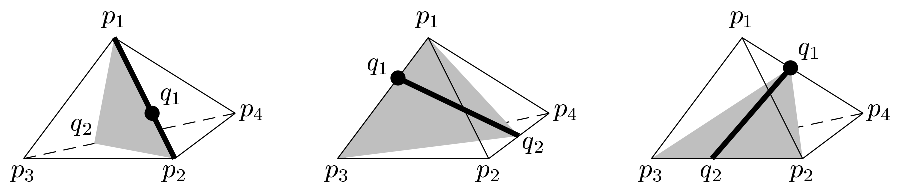
D'autre part, soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Si $t = (a\, b)$ est une transposition (avec $1 \le a < b \le n$), on note L_t le groupe SL(2) agissant naturellement sur $\mathbf{C}e_a \oplus \mathbf{C}e_b$ et trivialement sur les autres e_c.

Étant donné une permutation π et d transpositions $t_1, \ldots, t_d$ *commutant deux à deux*, on définit alors le sous-ensemble

$$E(\pi; t_1, \ldots, t_d) = \{\pi g_1 \ldots g_d B \mid g_k \in L_{t_k}\ \forall k\} \subset \mathrm{SL}(n)/B.$$

On montre [26] qu'il s'agit d'une sous-variété lisse, isomorphe au produit de d droites projectives.

Exemple 9.3. Pour $n = 4$, on identifie les points de $\mathrm{SL}(4)/B$ aux drapeaux point-droite-plan dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbf{C}^4)$. Notons $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^3$ les points à l'infini de la base canonique de $\mathbf{C}^4$. Il y a trois manières de choisir deux transpositions t_1, t_2 qui commutent ; pour $\pi = \mathrm{id}$, on obtient les dessins suivants :



$t_1 = (1\,2)$, $t_2 = (3\,4)$; $t_1 = (1\,3)$, $t_2 = (2\,4)$; $t_1 = (1\,4)$, $t_2 = (2\,3)$.

Par exemple, $E(\mathrm{id}; (1\,3), (2\,4))$ est l'ensemble de tous les drapeaux de la forme indiquée dans le deuxième dessin, avec q_1 variant sur la droite (p_1p_3) et q_2 variant sur la droite (p_2p_4).

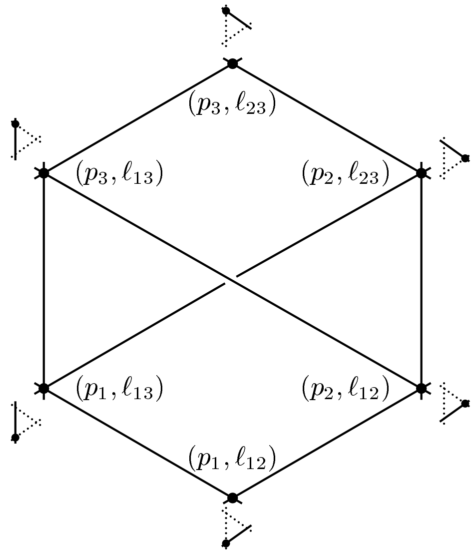
Cet exemple est assez représentatif de la situation générale : les points à l'infini de la base canonique de $\mathbf{C}^n$ forment les sommets $p_1, \ldots, p_n$ d'un tétraèdre dans $\mathbb{P}^{n-1}$, et le choix de π et de $t_1, \ldots, t_d$ correspond au choix de d « arêtes » (vues comme droites) gauches deux à deux. Chaque fois que l'on choisit des points $q_1, \ldots, q_d$ sur ces droites, on construit un drapeau à partir de ces points et de $p_1, \ldots, p_n$ un peu comme dans les trois dessins ci-dessus ; en faisant varier chaque q_k sur sa droite, on obtient une sous-variété de $\mathrm{SL}(n)/B$. Il résulte du fait que les d droites choisies sont gauches deux à deux que la sous-variété obtenue est un produit de d copies de $\mathbb{P}^1$, comme annoncé.

La variété E du théorème sera obtenue en prenant la réunion de certaines sous-variétés de la forme $E(\pi; t_1, \ldots, t_d)$ – pas toutes. Afin de sélectionner celles que l'on va prendre, rappelons que l'on appelle *inversion* d'une permutation π tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\pi(i) > \pi(j)$, et notons $I(\pi)$ le nombre d'inversions de π.

On dira alors qu'une sous-variété $E(\pi; t_1, \ldots, t_d)$ est *monogressive* si, pour toute partie $\{k_1, \ldots, k_r\} \subset \{1, \ldots, d\}$, on a $I(\pi t_{k_1} \ldots t_{k_r}) = I(\pi) + r$. Autrement dit, on demande qu'en multipliant π à droite par des t_k de manière répétée, le nombre d'inversions augmente de 1 à chaque multiplication.

On définit alors E comme la réunion de toutes les sous-variétés $E(\pi; t_1, \ldots, t_d)$ qui sont monogressives.

Exemple 9.4. Notons $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2$ les points à l'infini de la base canonique de $\mathbf{C}^3$ et ℓ_{ij} la droite $(p_i p_j)$. Voici la variété E pour $n = 3$:



Elle a huit composantes irréductibles, chacune isomorphe à la droite projective ; à côté de chacun de ceux-ci se trouve un petit dessin le représentant comme drapeau dans $\mathbb{P}^2$. Chaque courbe est « la plus naturelle » que l'on puisse faire passer par ces points singuliers : par exemple, celle passant par (p_3, ℓ_{13}) et (p_2, ℓ_{12}) est l'ensemble de tous les drapeaux (p, ℓ) avec p sur ℓ_{23} et ℓ passant par p_1.

Nous ne détaillerons pas ici la description des automorphismes σ_i (pour cela, voir [25]). Mentionnons simplement le fait qu'ils stabilisent chaque composante irréductible de E, et que leur comportement généralise assez naturellement celui de l'automorphisme dans l'exemple 5.2.

Références

[1] H. H. Andersen, P. Polo, K. Wen, Representations of quantum algebras, *Invent. Math.* **104** (1991), 1–59.

[2] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, Quantum deformations of GL_n, *Commun. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 879–895.

[3] M. Artin, J. T. Stafford, Noncommutative graded domains with quadratic growth, *Invent. Math.* **122** (1995), 231–276

[4] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *in* in "The Grothendieck Festschrift, I," Birkhäuser, Basel, 1990.

[5] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, *Invent. Math.* **106** (1991), 335–388.

[6] M. Artin, M. Van den Bergh, Twisted homogeneous coordinate rings, *J. Algebra* **133** (1990), 249–271.

[7] M. Artin, J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* **109** (1994), 228–287

[8] A. Braverman, On quantum flag algebras, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* **320** (1995), 1055–1059.

[9] T. Cassidy, Global dimension 4 extensions of Artin-Schelter regular algebras, *J. Algebra* **220** (1999), 225–254

[10] D. Chan, Twisted multi-homogeneous coordinate rings, *J. Algebra* **223** (2000), 438–456.

[11] J. Donin, D. Gurevich, Quasi-Hopf algebras and R-matrix structures in line bundles over flag manifolds, *Selecta Math.* **12** (1993), 37–48.

[12] V. G. Drinfel′d, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254–258.

[13] R. Fioresi, Quantum deformation of the flag variety, *Commun. Algebra* **27** (1999), 5669–5685.

[14] M. Gorelik, The prime and primitive spectra of a quantum Bruhat cell translate, *J. Algebra* **227** (2000), 211-253

[15] J. C. Jantzen, "Lectures on quantum groups," American Math. Soc., Providence, 1996.

[16] M. Jimbo, A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.

[17] A. Joseph, Faithfully flat embeddings for minimal primitive quotients of quantized enveloping algebras, *Israel Math. Conf. Proc.* **7** (1993), 79–106.

[18] D. S. Keeler, Criteria for σ-ampleness, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 517–532

[19] V. Lakshmibai, N. Reshetikhin, Quantum flag and Schubert schemes, *Contemp. Math.* **134** (1992), 145–181.

[20] G. Lancaster, J. Towber, Representation-functors and flag-algebras for the classical groups. I, *J. Algebra* **59** (1979), 16–38.

[21] L. Le Bruyn, S. P. Smith, M. Van den Bergh, Central extensions of three dimensional Artin-Schelter regular algebras, *Math. Z.* **222** (1996), 171–212

[22] V. A. Lunts, A. L. Rosenberg, Localization for quantum groups, *Selecta Math.* **5** (1999), 123–150.

[23] G. Lusztig, Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. Math.* **70** (1988), 237–249.

[24] Yu. I. Manin, "Quantum groups and noncommutative geometry," Université de Montréal, Montréal, 1988.

[25] Ch. Ohn, "Classical" flag varieties for quantum groups: the standard quantum $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$, preprint, math.QA/0007005.

[26] Ch. Ohn, A class of T-stable $(\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1)$'s in G/B, preprint, math.AG/0007006.

[27] M. Rosso, Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988), 581–593.

[28] Ya. S. Soibel′man, On the quantum flag manifold, *Funct. Anal. Appl.* **26** (1992), 225–227.

[29] D. R. Stephenson, Artin-Schelter regular algebras of global dimension three, *J. Algebra* **183** (1996), 55–73

[30] J. V. Stokman, M. S. Dijkhuizen, Quantized flag manifolds and irreducible $*$-representations, *Commun. Math. Phys.* **203** (1999), 297–324.

[31] P. Šťovíček, R. Twarock, Representations of $\mathcal{U}_h(\mathfrak{su}(N))$ derived from quantum flag manifolds, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 1161–1182.

[32] E. Taft, J. Towber, Quantum deformation of flag schemes and Grassmann schemes. I. A q-deformation of the shape algebra for $GL(n)$, *J. Algebra* **142** (1991), 1–36.

[33] M. Vancliff, K. Van Rompay, Embedding a quantum nonsingular quadric in a quantum $\mathbb{P}^3$, *J. Algebra* **195** (1997), 93–129

[34] M. Van den Bergh, Blowing up non-commutative smooth surfaces, preprint, math.QA/9809116

[35] J. J. Zhang, Twisted graded algebras and equivalences of graded categories, *Proc. London Math. Soc.* **72** (1996), 281–311

Université de Reims, Département de Mathématiques (UPRESA 6056 du CNRS), Moulin de la Housse, B.P. 1039, F-51687 Reims Cedex 2, France

E-mail address: christian.ohn@univ-reims.fr