Effacement des dérivations et applications.

Gérard Cauchon

Laboratoire d'équations aux dérivées partielles et physique mathématique,
U.M.R. C.N.R.S. 6056,
U.F.R. Sciences, B.P. 1039, 51687 Reims Cedex 2, France.

1 L'algèbre $R = O_q(M_n(k))$

1.1 Conventions

• k désigne un corps commutatif.
• $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et q est un élément de $k^* := k \setminus \{0\}$ qui n'est pas une racine de l'unité.
• Toutes les algèbres considérées sont des k-algèbres.
• $\mathbb{N}^2$ est muni de l'ordre lexicographique $[((i < \alpha) \leq (j,\beta)) \Leftrightarrow ((i < j)$ ou $i = j$ et $\alpha \leq \beta)]$.

1.2 L'algèbre $R = O_q(M_n(k))$

$\mathcal{X} = (X_{i,\alpha})$ $(1 \leq i, \alpha \leq n)$ désignant une matrice $n \times n$, on note $R = O_q(M_n(k))$ l'algèbre engendrée par les indéterminées $X_{i,\alpha}$ $(1 \leq i, \alpha \leq n)$ soumises aux conditions ci-dessous:

Si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 extraite de $\mathcal{X}$, on a:

$$\begin{cases} yx = q^{-1}xy,\ zx = q^{-1}xz,\ zy = yz,\ ty = q^{-1}yt,\ tz = q^{-1}zt & (1) \\ tx = xt - (q - q^{-1})yz & (2) \end{cases}$$

On sait que R est une extension de Ore itérée de k en les indéterminées $X_{i,\alpha}$ (ordonnées selon l'ordre croissant de leurs indices).
C'est donc une k-algèbre intègre et nœthérienne (des 2 côtés).
On note $F = Fract(R)$ son corps (gauche) de fractions.

1.3 Le spectre premier de R

Un théorème de Goodearl et Letzter [5] sur les extensions de Ore itérées montre que tous les idéaux premiers de R sont complètement premiers.
Le tore $H = (k^*)^{2n}$ opère naturellement sur l'algèbre R de la manière suivante:
Si $h = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in H$, il existe un unique automorphisme

$R \longrightarrow R: \; x \mapsto h.x$ qui vérifie:

$$(\forall (i,\alpha) \in [\![1,\, n]\!]^2) \qquad h.X_{i,\alpha} = \lambda_i \mu_\alpha X_{i,\alpha}.$$

On en déduit une action de H sur le spectre premier de R, et on appelle idéaux H-premiers de R, les idéaux premiers P de R qui vérifient $h.P = P \quad (\forall h \in H)$.

On note $H\text{-}Spec(R)$ l'ensemble des idéaux H-premiers de R et, si $I \in H\text{-}Spec(R)$, on pose:

$$Spec_I(R) = \{P \in Spec(R) \mid \bigcap_{h \in H} h.P = I\}.$$

K. Goodearl et E. Letzter ont montré [6] que l'ensemble $H\text{-}Spec(R)$ est fini de cardinal inférieur à 2^{n^2} et que la famille $Spec_I(R) \quad (I \in H\text{-}Spec(R))$ est une partition (et même une stratification) de $Spec(R)$ que l'on appelle la H-stratification de Spec(R).

Je me propose, dans ce qui suit, de présenter la théorie de l'effacement des dérivations dans le cas de l'algèbre R et d'en déduire quelques propriétés nouvelles de $Spec(R)$.

2 L'algorithme d'effacement

2.1 Description (Rappel: $F = Fract(R)$)

On note $E = \{u \in \mathbb{N}^2 \mid (1,1) \leq u \leq (n,n+1)\} = [\![1,\, n]\!]^2 \cup \{(n,n+1)\}$.

L'algorithme consiste à construire, de proche en proche, une suite de matrices $\mathcal{X}^{(u)} = (X^{(u)}_{i,\alpha}) \in M_n(F)$ lorsque u décrit E en décroissant.

- Si $u = (n,n+1)$, on pose $\mathcal{X}^{(u)} = \mathcal{X}$.
- Si $(1,1) < u \leq (n,n+1)$, si $r = (j,\beta)$ est le plus grand élément de E strictement inférieur à u, et si on suppose construite la matrice $\mathcal{X}^{(u)} = (x_{i,\alpha})$, on construit la matrice $\mathcal{X}^{(r)} = (y_{i,\alpha})$ comme suit:

□ Si (i,α) est au nord-ouest de $r = (j,\beta)$ (dans $[\![1,\, n]\!]^2$ représenté sous forme d'un tableau à n lignes et n colonnes), c'est-à-dire $i < j$ et $\alpha < \beta$, on pose:

$$y_{i,\alpha} = x_{i,\alpha} - x_{i,\beta} x_r^{-1} x_{j,\alpha}.$$

□ Si (i,α) n'est pas au nord-ouest de $r = (j,\beta)$, on pose:

$$y_{i,\alpha} = x_{i,\alpha}.$$

2.2 Propriétés

On observe que la construction ci-dessus n'a de sens que si $x_r \neq 0$, et on démontre ([1] et [2]):

Proposition 2.2. 1
L'algorithme ci-dessus est bien défini (quel que soit u).

Si $u \in E$, on note $R^{(u)}$ la sous-algèbre de F engendrée par les $X_{i,\alpha}^{(u)}$ $(1 \leq i, \alpha \leq n)$. (On a donc $R^{(n,n+1)} = R$.)

Proposition 2.2. 2 $(u \in E)$
Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *une matrice* 2×2 *extraite de* $\mathcal{X}^{(u)}$ *avec* $t = X_{i,\alpha}^{(u)}$.

□ *Si* $(i,\alpha) < u$, *alors* x, y, z, t *vérifient les relations* (1) *et* (2) *du* 1.2).

□ *Si* $(i,\alpha) \geq u$, *alors* x, y, z, t *vérifient les relations* (1) *ainsi que la version simplifiée de* (2) *suivante:*

$$tx = xt \qquad (2\ ^{bis}\ )$$

Proposition 2.2. 3 $(u \in E)$

1) $R^{(u)}$ *est la k-algèbre engendrée par les coefficients* $X_{i,\alpha}^{(u)}$ *de la matrice* $\mathcal{X}^{(u)}$, *soumis aux (seules) relations de la proposition 2.2.2.*

2) $R^{(u)}$ *est une extension de Ore itérée de* k *en les indéterminées* $X_{i,\alpha}^{(u)}$ *(ordonnées selon l'ordre croissant de leurs indices).*

3) $R^{(u)}$ *est une k-algèbre intègre, nœthérienne, et tous ses idéaux premiers sont complètement premiers.*

Si $h = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in H = (h^*)^{2n}$, l'automorphisme $x \mapsto h.x$ de R se prolonge naturellement en un automorphisme de son corps de fractions F et on a:

Proposition 2.2. 4 $(u \in E)$

1) Si $(i,\alpha) \in [\![1, n]\!]^2$, *on a* $h.X_{i,\alpha}^{(u)} = \lambda_i \mu_\alpha X_{i,\alpha}^{(u)}$.

2) Le groupe H *opère naturellement sur l'algèbre* $R^{(u)}$ *et, par suite, sur son spectre premier* $Spec(R^{(u)})$.

Lorsque $u = (1,1)$, on écrit $\mathcal{T} = \mathcal{X}^{(u)}$, on note $T_{i,\alpha} = X_{i,\alpha}^{(u)}$ $(1 \leq i, \alpha \leq n)$ ses coefficients, et on pose $\overline{R} = R^{(u)}$.

Des propositions 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 ci-dessus, on déduit:

Proposition 2.2. 5

1) $\overline{R}$ *est la k-algèbre engendrée par les coefficients de la matrice* $\mathcal{T}$ *soumis aux (seules) relations ci-dessous:*

Si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *est une matrice* 2×2 *extraite de* $\mathcal{T}$*, ses coefficients vérifient les relations de commutation* (1) *et* (2 ^{bis}).

Par suite, $\overline{R}$ *est l'algèbre des fonctions régulières sur un espace affine quantique de dimension* n^2.

2) Le groupe H *opère naturellement sur l'algèbre* $\overline{R}$.

Si $h = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in H$ *et si* $(i,\alpha) \in [\![1, n]\!]^2$*, on a:*

$$h.T_{i,\alpha} = \lambda_i \mu_\alpha \; T_{i,\alpha}.$$

Convention 2.2. 1 *Si* w *est une partie de* $[\![1, n]\!]^2$*, on note* J_w *l'idéal bilatère de* $\overline{R}$ *engendré par les* $T_{i,\alpha}$ *lorsque* (i,α) *décrit* w *(si* $w = \emptyset$, $J_w = \{0\}$*) et* $Spec_w(\overline{R}) = \{P \in Spec(\overline{R}) \mid \{(i,\alpha) \mid T_{i,\alpha} \in P\} = w\}$.

On montre ([1] et [7]):

Proposition 2.2. 6

1) Les J_w $(w \in \mathcal{P}([\![1, n]\!]^2))$ *sont des idéaux H-premiers de* $\overline{R}$.

2) Ce sont les seuls idéaux H-premiers de $\overline{R}$.

3) La famille $(Spec_w(\overline{R}))$ $(w \in \mathcal{P}([\![1, n]\!]^2))$ *n'est autre que la H-stratification de* $Spec(\overline{R})$ *et, pour chaque w,* $Spec_w(\overline{R})$ *est homéomorphe au spectre premier d'une algèbre de polynômes de Laurent commutative.*

3 Applications

3.1 Description de $Spec(R)$

Considérons un élément u de $E \setminus \{(1,1)\}$ et notons $r = (j,\beta)$ le plus grand élément de E strictement inférieur à u.

Posons, comme dans le paragraphe 2.1, $\mathcal{X}^{(u)} = (x_{i,\alpha})$, $\mathcal{X}^{(r)} = (y_{i,\alpha})$ et observons que $y_r = x_r$. Cet élément (appelé le pivot de l'algorithme de construction de $\mathcal{X}^{(r)}$) est commun à $R^{(r)}$ et $R^{(u)}$. Donc $S = \{x_r^N \mid N \in \mathbb{N}\}$ est un système multiplicatif d'éléments réguliers dans $R^{(r)}$ et $R^{(u)}$, et on montre ([1] et [2]):

Proposition 3.1. 1

1) S *vérifie la condition de Ore (des deux côtés) dans* $R^{(r)}$ *et dans* $R^{(u)}$.

2) $R^{(r)} \; S^{-1} = R^{(u)} \; S^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & | & \\ R^{(r)}\ S^{-1} & = & R^{(u)}\ S^{-1} \\ & / \ \backslash & \\ R^{(r)} & & R^{(u)} \end{array}$$

Notons $Spec_1(R^{(u)}) = \{P \in Spec(R^{(u)}) \mid x_r \in P\}$,
$Spec_0(R^{(u)}) = \{P \in Spec(R^{(u)}) \mid x_r \notin P\}$,
et définissons de la même manière $Spec_1(R^{(r)})$ et $Spec_0(R^{(r)})$.

Comme les idéaux premiers de $R^{(u)}$ sont complètement premiers, on a aussi $Spec_0(R^{(u)}) = \{P \in Spec(R^{(u)}) \mid P \cap S = \emptyset\}$ d'où, classiquement, un homéomorphisme: $Spec_0(R^{(u)}) \simeq Spec(R^{(u)}\ S^{-1}) = Spec(R^{(r)}\ S^{-1})$
$P \mapsto P\ S^{-1} = Q$
$(Fract(\dfrac{R^{(u)}}{P}) \simeq Fract(\dfrac{R^{(u)}\ S^{-1}}{Q}))$.

De même, on a un homéomorphisme: $Spec(R^{(r)}\ S^{-1}) \simeq Spec_0(R^{(r)})$
$Q \mapsto Q \cap R^{(r)} = P'$
$(Fract(\dfrac{R^{(r)}\ S^{-1}}{Q}) \simeq Fract(\dfrac{R^{(r)}}{P'}))$.

D'où un homéomorphisme: $Spec_0(R^{(u)}) \simeq Spec_0(R^{(r)})$
$P \mapsto (P\ S^{-1}) \cap R^{(r)} = P'$
$(Fract(\dfrac{R^{(u)}}{P}) \simeq Fract(\dfrac{R^{(r)}}{P'}))$.

On observe que $Spec_1(R^{(u)})$ est naturellement homéomorphe à $Spec(\dfrac{R^{(u)}}{(x_r)})$ et que les classes $\overline{x_{i,\alpha}}$ des $x_{i,\alpha}$ dans $\dfrac{R^{(u)}}{(x_r)}$ vérifient les relations de commutation suivantes:

Si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 extraite de la matrice $(\overline{x_{l,\gamma}})$, avec $t = \overline{x_{i,\alpha}}$, on a:

□ $(i,\alpha) < u \ \Rightarrow\ x, y, z, t$ vérifient (1) et (2).
□ $(i,\alpha) \geq u \ \Rightarrow\ x, y, z, t$ vérifient (1) et ($2^{\ bis}$).

Lorsque $(i,\alpha) = r$, on a $t = \overline{x_r} = 0$ et x, y, z, t vérifient aussi (1) et ($2^{\ bis}$). On peut donc remplacer u par r dans les implications ci-dessus. Donc les $\overline{x_{i,\alpha}}$ vérifient les mêmes relations que les $y_{i,\alpha}$. Comme $R^{(r)}$ est engendré par les $y_{i,\alpha}$ soumis à ces seules relations, on a:

Lemme 3.1. 1
Il existe un (unique) homomorphisme $f : R^{(r)} \to \dfrac{R^{(u)}}{(x_r)}$ *qui transforme* $y_{i,\alpha}$ *en* $\overline{x_{i,\alpha}}$ *pour tout* (i,α). f *est surjectif et son noyau* N *contient le pivot* y_r.

D'où l'existence d'un homéomorphisme:

$$Spec_1(R^{(u)}) \simeq \{P \in Spec(R^{(r)}) \mid P \supset N\} \ \subset \ Spec_1(R^{(r)}).$$

D'où une injection "naturelle":

$$\varphi_r : Spec(R^{(u)}) = Spec_0(R^{(u)}) \bigsqcup Spec_1(R^{(u)}) \ \rightarrow \ Spec(R^{(r)})$$

qui vérifie: Si $P \in Spec_1(R^{(u)})$ a pour image $P' \in Spec_1(R^{(r)})$, alors $\dfrac{R^{(u)}}{P} \simeq \dfrac{R^{(r)}}{P'}$, de sorte que $Fract(\dfrac{R^{(u)}}{P}) \simeq Fract(\dfrac{R^{(r)}}{P'})$.

On en déduit:

Lemme 3.1. 2
Il existe une injection "naturelle" $\varphi_r : Spec(R^{(u)}) \to Spec(R^{(r)})$ *qui vérifie:*
Si $P \in Spec(R^{(u)})$ *a pour image* P' *par* φ_r, *alors*

$$Fract(\frac{R^{(u)}}{P}) \simeq Fract(\frac{R^{(r)}}{P'}).$$

Comme le pivot $y_r = x_r$ est un H-vecteur propre, il vient facilement:

Lemme 3.1. 3
$\varphi_r : Spec(R^{(u)}) \to Spec(R^{(r)})$ *commute avec les actions naturelles de* H *sur* $Spec(R^{(u)})$ *et* $Spec(R^{(r)})$.
(ie: $(\forall P \in Spec(R^{(u)}))\ (\forall h \in H) \quad \varphi_r(h.P) = h.\varphi_r(P))$

En notant φ la composée des φ_r, on peut démontrer la proposition suivante:

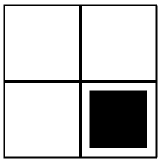
Proposition 3.1. 2
Il existe une injection "naturelle" $\varphi : Spec(R) \to Spec(\overline{R})$ *qui vérifie les propriétés suivantes:*

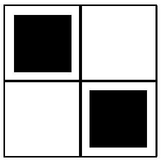
1) *Si* $P \in Spec(R)$ *a pour image* P' *par* φ, *on a:*
$$Fract(\frac{R}{P}) = Fract(\frac{\overline{R}}{P'}).$$
2) φ *commute avec les actions naturelles de* H *sur* $Spec(R)$ *et* $Spec(\overline{R})$.
3) φ *induit une injection de* $H\text{-}Spec(R)$ *dans* $H\text{-}Spec(\overline{R})$.
4) *Si* $I \in H\text{-}Spec(R)$ *et si* $\varphi(I) = J_w \quad (w \in \mathcal{P}([\![1,\, n]\!]^2))$, *alors* $\varphi(Spec_I(R)) = Spec_w(\overline{R})$ *et* φ *induit un homéomorphisme bi-croissant de* $Spec_I(R)$ *sur* $Spec_w(\overline{R})$.

On observera que les propriétés 1), 2), 3) de cette proposition sont des conséquences immédiates des lemmes 3.1.2 et 3.1.3.
La propriété 4) de la proposition ci-dessus nous donnera, par ailleurs, une description intéressante de la H- stratification de $Spec(R)$ si on connaît l'image par φ de H-$Spec(R)$.

Convention 3.1. 1 *Notons W l'ensemble des parties w de $[\![1,\, n]\!]^2$ qui vérifient la propriété suivante:*
Si $(j,\beta) \in w$, alors l'une (au moins) des deux propriétés suivantes est satisfaite:
- *L'ensemble des (i,α) de $[\![1,\, n]\!]^2$ "au-dessus" de (j,β) (ie : $i \leq j$ et $\alpha = \beta$) est contenu dans w.*
- *L'ensemble des (i,α) de $[\![1,\, n]\!]^2$ "à gauche" de (j,β) (ie : $i = j$ et $\alpha \leq \beta$) est contenu dans w.*

<u>*Exemple*</u>: Si $n = 2$, toutes les parties de $[\![1,\, n]\!]^2$ sont dans W sauf les deux parties suivantes:





On démontre [2]:

Théorème 3.1. 1
1) $\varphi\ (H\text{-}Spec(R)) = \{J_w \mid w \in W\}$.

2) $|H\text{-}Spec(R)| = |W|$

$$= (-1)^{n-1}(2^n + 3^n[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} 2^n] + \cdots + (n+1)^n[\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2^n + \cdots + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} n^n]).$$

On trouve ainsi: $|H\text{-}Spec(R)| =$ 14 pour $n = 2$,
230 pour $n = 3$,
6902 pour $n = 4$.

Observons que K. Goodearl et T. Lenagan ont classé (d'une autre manière) les idéaux H- premiers de R pour $n = 2$ et $n = 3$, et qu'ils en ont bien trouvé 14 et 230 dans ces deux cas.

3.2 Séparation normale

Soit $I \in H\text{-}Spec(R)$.

Notons $A = \dfrac{R}{I}$ et observons que, puisque I est H-invariant, le groupe H opère naturellement sur l'algèbre A.

On peut construire, au moyen de la notion de suite I-lacunaire (C.f. [2]), des mineurs quantiques (de la matrice $\mathcal{X}$) $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ qui vérifient:

Proposition 3.2. 1
1) Les classes $\delta_1, \cdots, \delta_s$ modulo I de $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ sont des éléments non nuls et H-normalisants de A (ie : si $1 \leq i \leq s$, il existe $h_i \in H$ tel que $\delta_i a = h_i(a)\delta_i$ $(\forall a \in A)$).
2) Si $I' \in H\text{-}Spec(R)$ et si $I' \underset{\neq}{\supseteq} I$, alors I' contient l'un des Δ_i.

Ceci permet d'affirmer (puisque les Δ_i sont H-propres):

Théorème 3.2. 1
H-$Spec(R)$ vérifie la propriété de séparation H-normale au sens de [3].
(ie: Si I, I' sont deux idéaux H-premiers de R, et si $I \subsetneq I'$, il existe un élément H-propre Δ de R qui vérifie:
- *$\Delta \in I' \setminus I$,*
- *Il existe $h \in H$ tel que: $(\forall x \in R)$ $\Delta x = h(x)\Delta$ $mod(I)$.)*

Un théorème de K. Goodearl [3] et un théorème de K. Goodearl-T. Lenagan [4] permettent d'en déduire:

Théorème 3.2. 2
1) $Spec(R)$ vérifie la propriété de séparation normale.
2) R est caténaire et vérifie la formule des hauteurs de Tauvel:
Si $P \in Spec(R)$, on a $ht(P) + GKdim(\dfrac{R}{P}) = n^2$, où $ht(P)$ désigne la hauteur de P et $GKdim(\dfrac{R}{P})$ la dimension de Gelfand-Kirillov de $\dfrac{R}{P}$.

Si $\varphi(I) = J_w$ ($w \in W$) et si $\overline{A} = \dfrac{\overline{R}}{J_w}$, on sait que A et $\overline{A}$ ont le même corps de fractions K, et on peut démontrer (C.f. [2]) que $\delta_1, \cdots, \delta_s$ sont aussi des éléments normalisants (non nuls) de $\overline{A}$. Si on note $\{r_1, \cdots, r_N\}$ le complémentaire de w

dans $[\![1, n]\!]^2$, $\overline{A}$ s'identifie naturellement à la sous-algèbre $k\langle T_{r_1}, \cdots, T_{r_N}\rangle$ de $\overline{R}$ engendrée par $T_{r_1}, \cdots, T_{r_N}$. C'est l'algèbre des fonctions régulières sur un espace affine quantique de dimension $N = n^2 - |W|$. Le système multiplicatif $\mathcal{E}$ engendré par $\delta_1, \cdots, \delta_s$, est donc un système d'éléments normalisants dans A et dans $\overline{A}$, et on montre que: $A\mathcal{E}^{-1} \subset \overline{A}\mathcal{E}^{-1} = k\langle T_1^{\pm 1}, \cdots, T_r^{\pm 1}\rangle \subset K$.

Lorsque $n = 2$ et $I = \{0\}$, on a $A = R = k\langle X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} \rangle$ et $\overline{A} = \overline{R} = k\langle T_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} \rangle$ avec $T_{11} = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$. Dans ce cas particulier, on a $s = 3$, $\delta_1 = X_{12}$, $\delta_2 = X_{21}$ et $\delta_3 = det_q(\mathcal{X}) = X_{11}X_{22} - qX_{12}X_{21} = T_{11}X_{22}$.

On voit facilement que $\mathcal{E} \bigcap AX_{22} = \emptyset$, de sorte que $X_{22}^{-1} \in \overline{A}\mathcal{E}^{-1} \setminus A\mathcal{E}^{-1}$. **On n'a donc pas toujours,** contrairement à ce que j'avais affirmé un peu rapidement dans mon exposé oral à Saint-Etienne, **l'égalité** $A\mathcal{E}^{-1} = \overline{A}\mathcal{E}^{-1}$**.**

Références

[1] G. Cauchon, *Effacement des dérivations. Spectres premiers et primitifs des algèbres quantiques.* Preprint.

[2] G. Cauchon, *Spectre premier de $O_q(M_n(K))$. Image canonique et séparation normale.* Preprint.

[3] K. R. Goodearl, *Prime Spectra of Quantized Coordinate Rings,* Interactions between ring theory and representations of algebras. (Murcia), 205-237, Lecture Notes in Pure and Appli. Math. **210,** Dekker, New-York, (2000).

[4] K. R. Goodearl and T. H. Lenagan, *Catenarity in quantum algebras,* J. Pure and Appl. Algebra, **111** (1996), 123-142.

[5] K. R. Goodearl and E. S. Letzter, *Prime Factor Algebras of the Coordinate Ring of Quantum Matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 1017-1025.

[6] K. R. Goodearl and E. S. Letzter, *The Dixmier-Moeglin equivalence in quantum coordinate rings and quantized Weyl Algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), N$^\circ$ 3, 1381-1403.

[7] K. R. Goodearl and E. S. Letzter, *Prime and primitive spectra of multiparameter quantum affine spaces,* Trends in ring theory (Miskolc, 1996), 39-58, C. M. S. Conf. Proc., **22,** Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1998).