Espaces euclidiens

1 Bases orthonormées

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n , le produit scalaire sera noté comme d'habitude : $< x, y >$, ou (x, y) ou $< x \mid y >$ On note $< x, x >=\| x \|^2$, $\| x \|$ est appelée la norme de x.
Soit une base B de E dont les éléments (de la base) sont notées e_i, $i = 1, \dots, n$.

Définition 1.1. *On dira que B est orthormée si $\| e_i \|= 1$ pour tout i et $< e_i, e_j >= 0$ si $i \neq j$.*

Théorème 1.2. *On peut toujours trouver des bases orthonormées.*

Le processus itératif (dit de Gram-Schmidt) décrit ci dessous permet toujours de passer d'une base quelconque à une base orthonormée (orthonormale).
On peut d'abord remplacer le vecteur e_1 par le vecteur $e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ qui est de norme 1. Puis pour tout $i \geq 2$ posons $f_i = e_i + a_i e'_1$ et imposons que $< e'_1, e'_i >$ soit nul. On obtient

$$< e'_1, e_i > + a_i = 0$$

On pose donc $f_i = e_i - < e'_1, e_i > e'_1$. Tous les vecteurs f_i ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires sont orthogonaux à e'_1. De plus e'_1 et les f_i constituent une base de E.
Si on remplace le système de vecteurs f_i par un système de vecteurs orthonormés engendrant le même sous-espace on aura en adjoignant e'_1 une base orthonormée de E. Mais le sous-espace engendré par les f_j est de dimension $n-1$. On peut donc faire une récurrence descendante sur n :
On recommence avec les vecteurs $f_2, \dots, f_n$, en particulier poser $e'_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} \dots$
La matrice de la forme bilinéaire associée au produit scalaire est la matrice I_n dans une base orthonormale. Ce n'est pas le cas dans une base quelconque! C'est la matrice dite de Gram-Schmidt $A = (a_{i,j})$, avec $a_{i,j} =< e_i, e_j >$.
On rappelle enfin la formule de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.3. *Soit E un espace euclidien pour tous $x, y \in E$ on a*

$$< x, y >^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2$$

2 Applications linéaires orthogonales

Définition 2.1. *Soit E un espace vectoriel euclidien, une application linéaire f de E dans E est dite orthogonale si elle conserve la norme : si pour tout $x \in E$ $\| x \|=\| f(x) \|$*

En fait une application qui préserve le produit salaire seulement (pour tout $x, y \in E$ $< x, y >=< f(x), f(y) >$) est linéaire.

Proposition 2.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

- *f est orthogonale,*
- *f préserve le produit scalaire : pour tous $x, y \in E$ $< x, y > = < f(x), f(y) >$.*
- *La matrice représentative A de f dans une base orthonormée est telle ${}^tAA = I_n$, soit $A^{-1} = {}^tA$, on dit que A est orthogonale.*
- *La matrice représentative A de f dans une base orthonormée est telle que la somme des carrés des éléments d'une colonne quelconque (ou d'une ligne quelconque) et les produits scalaires (standards) de deux colonnes (lignes) distinctes vaut* 0.

La mention "les produits scalaires (standards) de deux colonnes (lignes) distinctes vaut 0." signifie que $\sum_\ell \; a_{\ell,i}a_{\ell,j} = 0$ si $i \neq j$.
De plus

Proposition 2.3.
- *Une application orthogonale est bijective.*
- *Le déterminant de A vaut 1 ou -1.*
- *les valeurs propres de f ne peuvent tre que 1 ou -1.*

3 Applications et matrices orthogonales en dimension 2 et 3

Dans la section suivante on rappellera les notions de base sur vecteurs propres et valeurs propres.
Soit E un espace euclidien de dimension 2

Théorème 3.1. *Il y a deux types d'applications orthogonales :*

- *Une application orthogonale dont le déterminant vaut 1 est une rotation d'angle θ dont la matrice dans une base orthonormée quelconque est :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- *Une application orthogonale dont le déterminant vaut -1 est une symétrie orthogonale autour d'une droite. En particulier elle laisse un vecteur non nul fixe (elle a 1 pour valeur propre) et elle nvoie un vecteur non nul sur son opposé (elle a -1 pour valeur propre). Sa matrice est de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La droite d'angle $\theta/2$ avec l'axe des abscisses étant l'ensemble des vecteurs fixes.

Soit E un espace euclidien de dimension 3

Théorème 3.2. *Il y a deux types d'applications orthogonales :*

- *Une application orthogonale f dont le déterminant vaut 1 admet une droite fixe (donc 1 pour valeur propre) et est une rotation d'angle d'angle θ autour de cette droite. La trace de la matrice vaut $1 + 2\cos(\theta)$. sa matrice s'écrit donc dans une base orthonormée donc le premier vecteur est porté par la droite fixe :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- *Une application orthogonale f dont le déterminant vaut 1 est composée d'une symétrie orthogonale autour d'un plan et d'une rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de la symétrie (donc a -1 pour valeur propre). Sa matrice s'écrit donc dans une base orthonormée dont les deux derniers vecteurs correspondent au plan et le premier est celui associé la valeur prpre -1 :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas la trace est $-1 + 2\cos(\theta)$.
On remarquera que si $\theta = \pi$ alors -1 est valeur propre double.

La formule pour la trace ne détermine θ que au signe près. Pour lever l'ambiguité on doit utiser le produit vectoriel.
Ceci sera complété.

4 Valeurs propres et polynôme caractéristique

Soient E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E (c'est à dire une application linéaire de E dans lui même.

Définition 4.1. *Si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et un vecteur non nul $v \in E$ tels que $\varphi(v) = \lambda v$, on dit que λ est une valeur propre de u, et que v est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre λ.*

On considérera également 0 comme un vecteur propre de φ.

Proposition 4.2. *Soit λ une valeur propre de φ, le sous ensemble des vecteurs propres de φ associé à λ est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre de φ associé à λ.*

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme φ est appelé le spectre de φ et est noté $\mathrm{Spec}(\varphi)$.

- Une homotéthie de rapport λ a λ pour seule valeur propre, le sous-espace propre associé est tout l'espace,
- une rotation d'angle diférent de 0 et π du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeurs propres,
- l'endomorphisme de l'espace des fonctions dérivables dans lui même qui à une fonction associe sa dérivée admet tous les réels pour valeur propre, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est vecteur propre associé à la valeur propre a,

- un projecteur (différent de l'identité et de l'application nulle) a pour valeurs propres 0 et 1, les sous-espaces propres associés sont le noyau et l'image.

Soient E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

Théorème 4.3. *Le scalaire λ est valeur propre de φ si et seulement si l'endomorphisme $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Autrement dit si et seulement si $\det(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) = 0$.*

On sait que pour calculer ce déterminant on peut choisir une base quelconque de E, dans laquelle φ a pour matrice A, alors la matrice de $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ est $A - \lambda I_n$. Le déterminant cherché est celui de cette matrice. Répètons que le déterminant obtenu sera le même quelle que soit la base choisie.
Clairement en calculant $\det(A - XI_n)$ on obtient un polynôme en X degré n. Ce polynôme est appelé le polynôme caractéristique de φ ou le polynôme caractéristique de la matrice A. On le notera $c_\varphi(X)$ ou $c_A(X)$. La notation $\chi_\varphi(X)$ (resp. $\chi_A(X)$) est aussi utilisée.
Sa valeur pour $X = 0$ est $\det(A)$. Il s'écrit donc :

$$c_A(X) = (-1)^n X^n + \ldots + \det(A)$$

Proposition 4.4. *Le coefficient du terme de degré $n-1$ est $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.*

Donc

$$c_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 4.5. *Le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme φ si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique.*

On appellera valeur propre d'une matrice A, (n, n), les racines du polynôme caractéristique $c_A(X)$. Ce sont les valeurs propres de l'endomorphisme dont la matrice est A dans la base standard de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).
Dans la suite on parlera donc indifféremment des valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice dans une base.

Corollaire 4.6. *Un endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension n ou une matrice A (n, n) a au plus n valeurs propres.*

5 Matrices symétriques

Théorème 5.1. *Toute matrice symétrique réelle admet une diagonalisation dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$. En particulier toutes ses valeurs propres sont réelles.*

On ne va pas donner toute la démonstration mais seulement deux pas essentiels.
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$, on notera comme d'ordinaire U, V... les vecteurs colonnes dans $\mathbb{R}^n$. L'application qui à (U, V) associe ${}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.
Soit λ une valeur propre (éventuellement complexe) de A, et soit V un vecteur prpre associé (non-nul) : $AV = \lambda V$. Attention, $V \in \mathbb{C}^n$. Soit $\bar{V}$ le vecteur propre conjugué, on a : $A\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$. calculons maintenant ${}^t\bar{V}AV$. On a

$${}^t\bar{V}AV = {}^t\bar{V}(AV) = {}^t\bar{V}(\lambda V) = \lambda{}^t\bar{V}V$$

et

$$ {}^t\bar{V}AV = ({}^t\bar{V}A)V) = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}V) = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}V $$

car ${}^t\bar{V}A = {}^t({}^tA\bar{V}) = {}^t(A\bar{V}) = \bar{\lambda}{}^t\bar{V}$ en effet ${}^tA = A$. Il suit que $\bar{\lambda} = \lambda$ qui est réel.
La seconde observation est que si U et V sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ alors U et V sont orthogonaux. En effet on calcule la quantité ${}^tUAV$ de deux manières différentes comme plus haut (à droite puis à gauche). Comme $AV = \mu U$ ${}^tUAV = \mu < U, V >$, comme $AU = \lambda U$ on a ${}^tUAV = \lambda < U, V$. Comme $\lambda \neq \mu$ ceci entraîne que $< U, V >= 0$.