Espaces vectoriels et applications linéaires

1 Définitions

On parle d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ ou sur le corps $\mathbb{C}$. Les définitions sont les mêmes en substituant $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ ou *vice versa*.

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) est un ensemble E muni de deux opérations.*
D'abord d'une addition, c'est à dire qu'à tout couple $v, w \in E$ on peut associer $v + w \in E$ tel que les règles de calcul ordinaires dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) aient lieu. A savoir

- $(u + v) + w = u + (v + w)$ *pour tous* $u, v, w \in E$;
- $u + v = v + u$ *pour tous* $u, v \in E$;
- $u + v = v + u$ *pour tous* $u, v \in E$;
- *il existe un élément noté* 0_E *tel que* $u + 0_E = u$ *pour tout* $u \in E$; *pour tout* $u \in E$ *il existe un élément* $v \in E$ *tel que* $u + v = 0_E$.

De plus il existe une application de $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ notée $(\lambda, v) \longrightarrow \lambda.v$, telle que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et $v, w \in E$ on ait

- $1.v = v$;
- $(\lambda + \mu).v = \lambda.v + \mu.v$;
- $\lambda.(\mu.v) = (\lambda\mu).v$;
- $\lambda.(v + w) = \lambda.v + \lambda.w$.

Dans la suite $\lambda.v$ sera noté λv pour simplifier.
Les éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont appelés les scalaires, les éléments de E les vecteurs. La seconde opération est la multiplication par les scalaires.
Le vecteur 0_E est appelé le vecteur nul, il sera noté 0 simplement, on fera attention à ne pas le confondre avec $0 \in \mathbb{R}$ ou $0 \in \mathbb{C}$. On a $0_E.v = 0_E$ ($0v = 0$ avec les notations allégées. On le montre en observant que $v = 1.v = (1 + 0).v = 1.v + 0.v = v + 0.v$, soit $v = v + 0.v$ puis en simplifiant.
le vecteur v tel que $u + v = 0$ est appelé l'opposé il est noté $-u$ car il est égal à $(-1)u$.
Voici des exemples.

1. Si on considère $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) en prenant pour addition l'addition terme à terme : $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et pour multiplication par les scalaires $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ on constate qu'on a un espace vectoriel.

2. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
3. L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des fonctions dérivables $\mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des fonctions infiniment dérivables $\mathcal{D}^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. On peut évidemment considérer dans les exemples précédents des intervalles fermés à gauche ou à droite.
7. L'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
8. L'ensemble polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné n sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
9. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (sans second membre).
10. Les suites réelles ou complexes.

Définition 1.2. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F non-vide de E tel que :*

- *si $u, v \in F$ alors $u + v \in F$;*
- *si $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp $\mathbb{C}$) alors $\lambda u \in F$.*

- L'exemple 7 ci dessus est un sous-espace vectoriel de l'exemple 6 qui est lui même un sous-espace de l'exemple 5.
- $\mathbb{R}^{n-1}$ est un sous espace de $\mathbb{R}^n$, identifiant $\mathbb{R}^{n-1}$ aux n-uplets avec $x_n = 0$.
- Si on considère le plan $\mathbb{R}^2$ avec son système de coordonnées standard toute droite distincte passant par l'origine est un sous-espace (une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas un sous-espace).

On rappelle que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
On notera que le sous-ensemble réduit au vecteur nul 0 est un sous-espace noté $\{0\}$, on l'appelé le sous-espace trivial.

Définition 1.3. *(Somme de deux sous-espaces) Etant donnés deux sous-espaces F et G d'un espace E (on abrège sous-espace vectoriel eu sous-espace et espace vectoriel en espace) leur somme notée $F + G$ est le sous-espace constitué par les vecteurs de la forme $u + v$ pour tout $u \in F$, $v \in G$.*
Si $F \cap G = \{0\}$ la somme est dite directe, et dans ce cas on note $F \oplus G$. On dit aussi que F et G sont en somme directe et le sous-espace $F \oplus G$ est appelé la somme directe de F et G.

On remarquera que cette définition contient en fait un énoncé, le fait que $F+G$ est un sous-espace, qu'il faut démontrer (ce qui est facile). Plus généralement :

Définition 1.4. *(Somme de sous-espaces) Etant donnée une famille de sous-espaces F_i et $i = 1, \ldots, n$ d'un espace E leur somme notée*

$$F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i$$

est le sous-espace constitué par les vecteurs de la forme $x_1 + \ldots + x_n$ pour tout $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$.
Si tout $x \in \sum_{i=1}^{i=n} F_i$ a une seule écriture sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$ on dit que la somme est directe (ou que les sous-espaces sont en somme directe) et on note

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_n = \oplus_{i=1}^{i=n} F_i$$

On remarquera que cette définition contient en fait un énoncé, le fait que la somme est un sous-espace, qu'il faut démontrer (ce qui est facile).

Proposition 1.5. *Etant donnée une famille de sous-espaces F_i et $i = 1, \ldots, n$ d'un espace E leur somme est directe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes a lieu :*

- *L'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ avec $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$ a pour seule solution $x_1 = \ldots = x_n = 0$.*
- *Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a*

$$(F_1 + \ldots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}$$

Définition 1.6. *Si F et G sont des sous-espaces de E, si ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$ on dit que G est un supplémentaire de F (et F un supplémentaire de G).*

Un sous-espace a toujours un supplémentaire. Mais ce supplémentaire n'est pas unique.
Par exemple si on considère le plan $\mathbb{R}^2$ avec son système de coordonnées standard pour E et l'axe des abscices pour F, toute droite distincte passant par l'origine est un supplémentaire pour F.
Si on considère l'espace $\mathbb{R}^3$ avec son système de coordonnées standard pour E et le plan des x, y pour F, toute droite non contenue dans ce plan et passant par l'origine est un supplémentaire pour F.

2 Systèmes de vecteurs et dimension

Soit E un espace vectoriel. Un système de vecteurs de E est une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E.
On peut aussi considérer des familles infinies $(v_i)_{i \in I}$.

Définition 2.1. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ est lié si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Si le système n'est pas lié il est libre.*
Un système $(v_i)_{i \in I}$ est lié si il existe λ_i, $i \in I$ presque tous nuls (nuls sauf un nombre fini d'entre eux) tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$. Si le système n'est pas lié il est libre.

- Un système qui contient le vecteur nul est lié.
- Un système qui contient deux fois le même vecteur est lié.
- Un système qui contient un sous-système lié est lié.
- Un système qui est contenu dans un sous-système libre est libre.
- Parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à n le système $1, X, X^2, \ldots, X^n$ est libre.
- Soit P_i un polynôme de la forme $X^i + a_{-1}X^{i-1} + \ldots + a_0$, parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à n le système $P_0, P_2, \ldots, P_n$ est libre.
- Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le système $1, e^x, \ldots, e^{nx}$ est libre.

Etant donné un sytème $(v_1, \ldots, v_n)$ une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs est un sous-espace vectoriel appelé le sous-espace engendré par le système.

Définition 2.2. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $(v_i)_{i\in I}$) est générateur pour un espace vectoriel E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des v_i.*

Définition 2.3. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $(v_i)_{i\in I}$) est une base d'un espace vectoriel E si il est générateur et libre.*

Soit l'espace $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}$) , et soit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le terme 1 est en position i. Le système $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) appelé la base standard.
On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.4. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie on le même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace.*

Ce théorème s'étend aux espaces vectoriels de dimension infinie. Mais on n'en parlera pas ici, donc ans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie.

- Le système $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n, l'espace est de dimension $n + 1$.
- Soit P_i un polynôme de la forme $X^i + a_{-1}X^{i-1} + \ldots + a_0$, $0 \leq i \leq n$. le système $P_0, P_2, \ldots, P_n$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sans second membre est de dimension n.
- L'espace des suites linéaires récurrentes satisfaisant à une relation du type :

  $$u_k = a_{k-1}u_{k-1} + \ldots + a_{k-n}u_{k-n}$$

  est de dimension n.

Voici des critères pour reconnatre les bases.

Proposition 2.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs. On a équivalence entre:*
(i) $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E
(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre
(iii) $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice (est un système générateur).

La démonstration repose sur les résultats suivants :

Théorème 2.6. *(Base incomplète) Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, et soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une sous famille libre. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Corollaire 2.7. *Soient $e_1, \dots, e_k$ une famille libre de vecteurs de E d'un espace de dimension n. Il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $e_1, \dots, e_n$ est une base de E.*

Voici un corollaire

Corollaire 2.8. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de strictement plus de n vecteurs est liée (et toute famille libre a au plus n vecteurs).*

On notera aussi

Corollaire 2.9. *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de vecteurs, et soit $(w_1, \dots, w_{n+1})$ une famille de vecteurs combinaison linéaire des v_i. Alors la seconde famille est liée.*

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie, et

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Définition 2.10. *On appelle rang d'un système de vecteurs d'un espace E la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système.*

Le rang est toujours inférieur au nombre de vecteurs du système et à la dimension de l'espace ambiant E.
Voici deux exercices :

- Les familles suivantes sont-elles libres ?
  1. $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 2, 2)$ et $e_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
  2. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
  3. $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$, $e_3 = (5, 2, 3)$ et $e_4 = (6, 4, 5)$ dans $\mathbb{R}^3$.
  4. $e_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $e_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
- Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X + t + 1)^2$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}[X]_2$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2.

3 Sous espaces et sommes directes

Proposition 3.1. *Soient* **1.** *F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

2. *F et G sont en somme directe si et seulement si*
$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.
3. *On a équivalence entre:*
(i) $E = F \oplus G$
(ii) $E = F + G$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
(iii) $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

A titre d'exemple et de contre exemple on regardera la somme de deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.2. *Si F et G sont des sous-espaces de E, si ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$ on dit que G est un supplémentaire de F et F un supplémentaire de G.*

La troisième partie de la proposition précédente se généralise en

Proposition 3.3. *Soient*
3. *On a équivalence entre:*
(i)

$$E = \oplus_{i=1,\dots,n} F_i$$

(ii)

$$E = \sum_{i=1,\dots,n} F_i$$

et $\dim(E) = \Sigma_{i=1,\dots,n} \dim(F_i)$

La proposition suivante explique comment construire une base d'un espace vectoriel E qui est somme directe de deux sous-espaces F et G.

Proposition 3.4. *La réunion d'une base quelconque de F et d'une base quelconque de G est une base de E. autrement dit si $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de F, $(w_1, \dots, w_\ell)$ une base de G $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell$ est une base de E.*

Le résxultat s'étend à une somme directe de n sous-espaces.

4 Application linéaire, rang, projecteurs

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 4.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, on, dit que c'est une application linéaire si les deux conditions sont satisfaites pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) , $v, w \in E$:*

- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- $f(v+w) = f(v) + f(w)$.

La somme de deux applications linéaires est linéaire. Si on multiplie une application linéaire par un scalaire on obtient encore une application linéaire. L'ensemble des applications linéaires de E dans F forme un espace vectoriel noté $\mathcal{L}(E, F)$.
Si f est une application linéaire de E dans F, et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Le noyau de f est l'ensemble des $v \in E$ tels que $f(v) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Ker}(f)$.

L'image de f est l'ensemble des $f(v)$, $v \in E$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Im}(f)$.

Définition 4.2. *On appelle rang de f la dimension de l'image de f.*

Définition 4.3. *Le rang d'un système de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est la dimension du sous-espace qu'il engendre.*

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le rang de f est le rang du système de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Proposition 4.4. *(théorème du rang) On a*

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$$

Soit E' un supplémentaire dans E de $\ker f$. L'application f restreinte à E' induit un isomorphisme sur E'. On a donc $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$.

Proposition 4.5. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, et supposons que $\dim E = \dim F$. On a alors équivalence entre*
(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

On va maintenant considérer des applications linéaires particulières les projecteurs. Soit $E = F \oplus G$ une décomposition en somme directe. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$. Le projecteur parallèlement à G sur F est l'application de E dans E qui a x associe x_F, on le notera p. En voici les prpriétés :

- p est linéaire;
- $\mathrm{Ker}(p) = G$;
- $\mathrm{Im}(p) = F$;
- $p^2 = p$.

En fait

Théorème 4.6. *Une application linéaire p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Dans ce cas c'est le projecteur parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ sur $\mathrm{Im}(p)$.*

Si E est un espace vectoriel l'ensemble des applications linéaires de E dans lui même est noté $\mathcal{L}(E)$.
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des apliccations linéaires inversibles de E dans E. La composée de deux applications inversibles est inversible.

5 Hyperplans et formes linéaires

Soit E un espace de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E de dimension $n-1$.

Supposons que E est de dimension n.
On a équivalence entre:
(i) H est un hyperplan de E;
(ii) Pour tout vecteur $v \in E$, $v \notin H$ E est somme directe de H et de $\mathbb{R}v$ (resp. $\mathbb{C}v$.

Une frorme linéaire sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) . Si ϕ une forme linéaire non nulle. D'après le théorème du rang, son noyau est un hyperplan de E.
Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire non nulle ϕ sur E telle que $H = \ker \phi$. On dit que ϕ est une équation de H.
Soit $v \in E$ tel que $E = H \oplus Kv$. Soit p la projection sur Kv parallèlement à H. Il suffit alors de prendre pour ϕ l'application de E dans K telle que, pour tout $x \in E$, $p(x) = \phi(x)v$.
Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans passant par l'origine. Ils ont une équation du type $ax + by + cz = 0$; $\phi(x, y, z) = ax + by + cz$ est la forme linéaire correspondante.