Examen final du 29 avril 2014
Éléments de correction

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Exercice 1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = X - Y.$$

1. Calculer la densité de (U,V).

Comme X et Y sont indépendantes, (X,Y) a pour densité

$$(x,y) \mapsto f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On a

$$E[g(U,V)] = E[g(X+Y, X-Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x+y, x-y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{dx\,dy}{2\pi}.$$

On pose $(u,v) = (x+y, x-y)$. L'application $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et son inverse est $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$; ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$J\varphi^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} E[g(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) e^{-\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{8}} \frac{1}{2} \frac{du\,dv}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \frac{du\,dv}{4\pi}. \end{aligned}$$

Ceci montre que (U,V) a pour densité

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}.$$

2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

On constate que $f_{(U,V)}$ est à variables séparées, donc U et V sont indépendantes, et

$$f_U(u) = c e^{-u^2/4}, \qquad f_V(v) = c' e^{-v^2/4},$$

avec $cc' = \frac{1}{4\pi}$. Ou bien on reconnaît la loi $\mathcal{N}(0,2)$, d'où $c = c' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, ou bien par symétrie $c = c'$ d'où $c = c' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. En tout cas, U et V suivent la loi $\mathcal{N}(0,2)$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité

$$f : x \mapsto f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Justifier que f définit bien une densité.

On a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: si $x < 0$, $f(x) = 0$, et si $x \geq 0$ alors $e^{-2x} \leq e^{-x}$ d'où $f(x) \geq 0$.
De plus, on vérifie que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^\infty 2(e^{-x} - e^{-2x})dx = 1$.

2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

Pour tout $x < 0$, $F_X(x) = 0$; et, pour tout $x \geq 0$, on calcule

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 2(e^{-t} - e^{-2t})dt = 1 - 2e^{-x} + e^{-2x}.$$

3. Calculer $E[X]$.

Comme $X \geq 0$ p.s., l'espérance est bien définie, et

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^\infty 2x(e^{-x} - e^{-2x})dx = \frac{3}{2}.$$

(on pouvait aussi utiliser la formule vue en TD : comme $X \geq 0$, $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty (2e^{-x} - e^{-2x})dx = 2 - \frac{1}{2}$, calcul plus simple)

4. On définit $Y = 1 - e^{-X}$. Montrer que Y a pour densité $f_Y : y \mapsto 2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.

Pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on a

$$E[g(Y)] = E[g(1 - e^{-X})] = \int_0^\infty g(1 - e^{-x})2(e^{-x} - e^{-2x})dx = \int_0^\infty g(1 - e^{-x})2e^{-x}(1 - e^{-x})dx,$$

d'où, en posant $y = 1 - e^{-x}$ (c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$), ce qui donne $dy = e^{-x}dx$,

$$E[g(Y)] = \int_0^1 g(y)2ydy = E[g(Z)],$$

où Z a pour densité $2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$. Ceci vaut pour toute fonction mesurable positive g, donc Y a même loi que Z, d'où le résultat.

5. Calculer l'espérance et la variance de Y.

On calcule $E[Y] = \int_0^1 2y^2dy = \frac{2}{3}$ et $E[Y^2] = \int_0^1 2y^3dy = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, d'où $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$.

6. Calculer la fonction de répartition F_Y de Y.

Pour tout $y < 0$, $F_Y(y) = 0$; pour tout $y > 1$, $F_Y(y) = 1$; et, pour tout $0 \leq y \leq 1$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_0^y 2tdt = y^2.$$

7. Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \qquad \text{et} \qquad M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n).$$

7.a) Que peut-on dire de la suite $\dfrac{S_n}{n}$?

Comme $Y_1, Y_2, \ldots$ sont indépendantes et de même loi, intégrables et d'espérance $E[Y] = \frac{2}{3}$, la loi forte des grands nombres montre que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\frac{2}{3}$.
On pourrait aussi appliquer le théorème central limite car les Y_i sont de carré intégrable, de variance $\frac{1}{18}$, ce qui donne :

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{2}{3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{18}\right).$$

7.b) Pour $0 < \delta < 1$, calculer $P\Big(M_n \leq 1-\delta\Big)$, et donner la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$. Que dire de $P(M_n \geq 1+\delta)$? En déduire que la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité et donner sa limite.

> Pour $0 < \delta < 1$, on a
>
> $$P(M_n \leq 1-\delta) = P(\max(Y_1,\dots,Y_n) \leq 1-\delta) = P(Y_1 \leq 1-\delta,\dots,Y_n \leq 1-\delta) = P(Y_1 \leq 1-\delta)^n = F_Y(1-\delta)^n$$
>
> car les Y_i sont indépendants et de même loi que Y, d'où
>
> $$P(M_n \leq 1-\delta) = (1-\delta)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
>
> On a $Y_i \leq 1$ pour tout i, donc $M_n = \max(Y_1,\dots,Y_n) \leq 1 < 1+\delta$. Par suite, $P(M_n \geq 1+\delta) = 0$. On a donc
>
> $$P\Big(|M_n - 1| \geq \delta\Big) = P\Big(\{M_n \leq 1-\delta\} \uplus \{M_n \geq 1+\delta\}\Big) = P(M_n \leq 1-\delta) + P(M_n \geq 1+\delta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
>
> (On pouvait aussi simplement écrire $P(|M_n - 1| \geq \delta) = P(M_n \geq 1+\delta)$ vu que $M_n \leq 1$.)
> Ceci montre que M_n converge en probabilité vers 1.

Exercice 3 – *Équilibrage de pièce.* On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de tirages à pile ou face indépendants d'une même pièce biaisée (on note 1 pour pile et 0 pour face) : il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_n = 0) = 1-p.$$

On groupe les tirages 2 par 2 (X_1 avec X_2, X_3 avec X_4, etc.), et on considère le premier groupe où les deux tirages sont distincts :

$$N = \min\big\{n \geq 1 \,\big|\, (X_{2n-1}, X_{2n}) = (0,1) \text{ ou } (1,0)\big\}.$$

On notera $A_n = \{(X_{2n-1}, X_{2n}) = (0,1) \text{ ou } (1,0)\}$ l'événement où les tirages du n-ième groupe sont distincts.

1. Que vaut $P(A_n)$, pour tout $n \geq 1$? Les événements $A_1, A_2, \dots$ sont-ils indépendants ? (Pourquoi ?)

> On a $P(A_n) = P(\{X_{2n-1} = 0, X_{2n} = 1\} \uplus \{X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 0\}) = P(X_{2n-1} = 0, X_{2n} = 1) + P(X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 0) = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p)$ car X_{2n-1} et X_{2n} sont indépendants.
> De plus, les événements $A_1, A_2, \dots$ dépendent de paquets disjoints de variables aléatoires de la suite $X_1, X_2, \dots$ (A_1 dépend de (X_1, X_2), A_2 de (X_3, X_4), etc.), et les variables $X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes, donc les événements $A_1, A_2, \dots$ sont indépendants (propriété de regroupement par paquets).

2. Pour tout $n \geq 1$, exprimer l'événement $\{N = n\}$ en fonction des A_k. En déduire $P(N = n)$. Quelle est la loi de N ?

> On a
>
> $$\{N = n\} = (A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \cdots \cap (A_{n-1})^c \cap A_n$$
>
> d'où, les événements A_i étant indépendants (et donc leurs complémentaires aussi),
>
> $$P(N = n) = P((A_1)^c)P((A_2)^c)\cdots P((A_{n-1})^c)P(A_n) = (1 - 2p(1-p))^{n-1}2p(1-p).$$
>
> Ceci montre que N suit la loi géométrique de paramètre $2p(1-p)$.

3. Calculer $P(\{N = n\} \cap \{X_{2N-1} = 1\})$ pour tout $n \geq 1$.

> On a
>
> $$\{N = n\} \cap \{X_{2N-1} = 1\} = (A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \cdots \cap (A_{n-1})^c \cap A_n \cap \{X_{2n-1} = 1\}$$
>
> et $A_n \cap \{X_{2n-1} = 1\} = \{X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 0\}$ a pour probabilité $p(1-p)$ et est indépendant de $A_1, \dots, A_{n-1}$ (comme pour A_n). Donc
>
> $$P(\{N = n\} \cap \{X_{2N-1} = 1\}) = (1 - 2p(1-p))^{n-1}p(1-p).$$

4. En déduire $P(X_{2N-1} = 1)$.

On note que $N < \infty$ p.s. (par la question 1, N suit une loi géométrique), c'est-à-dire $\bigcup_{n\geq 1}\{N = n\} = \Omega$ d'où, « en découpant selon la valeur de N »,

$$\{X_{2N-1} = 1\} = \bigcup_{n\geq 1} \big(\{X_{2N-1} = 1\} \cap \{N = n\}\big)$$

Les événements dans la réunion sont disjoints, et leurs probabilités sont données par la question précédente, d'où

$$P(X_{2N-1} = 1) = \sum_{n\geq 1}(1-2p(1-p))^{n-1}p(1-p) = \frac{p(1-p)}{1-(1-2p(1-p))} = \frac{1}{2}.$$

5. En déduire une méthode, à l'aide d'une pièce de monnaie biaisée, pour tirer un nombre au hasard dans l'ensemble $\{0, 1\}$ de façon équiprobable. *NB. La méthode ne requiert pas de connaître p.*

On lance la pièce de monnaie 2 fois de suite. Si on obtient deux résultats différents on s'arrête ; sinon, on recommence. Quand on s'est arrêté, on pose alors $Z = 1$ si on a obtenu pile puis face, et $Z = 0$ si on a obtenu face puis pile. Avec les notations précédentes, on fait donc $2N$ lancers, et on a $Z = X_{2N-1}$, donc Z suit la loi uniforme sur $\{0, 1\}$ vu la question 4.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$ (donc de densité $f : x \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$).

1. Calculer la fonction caractéristique $t \mapsto \Phi_X(t) = E[e^{itX}]$ de X. Vérifier que $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout réel $t \neq 0$,

$$\Phi_X(t) = \int_{-1}^{1} e^{itx}\frac{dx}{2} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t},$$

et $\Phi_X(0) = E[e^0] = 1$. En tout cas, $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi (non spécifiée). On pose $W = Y - Z$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_W(t) = \Phi_Y(t)\overline{\Phi_Y(t)} = |\Phi_Y(t)|^2.$$

On a

$$\Phi_W(t) = E[e^{it(Y-Z)}] = E[e^{itY}e^{-itZ}] = E[e^{itY}]E[e^{-itZ}]$$

car Y, Z sont indépendantes, puis, comme Z a même loi que Y,

$$\Phi_W(t) = E[e^{itY}]E[e^{-itY}] = \Phi_Y(t)\Phi_Y(-t).$$

Enfin, comme Y est réelle, $e^{-itY} = \overline{e^{itY}}$, d'où $E[e^{-itY}] = \overline{E[e^{itY}]}$. On utilise ici le fait que, pour toute variable aléatoire complexe ξ, si $A = \Re(\xi)$ et $B = \Im(\xi)$, par linéarité de l'espérance,

$$E[\overline{\xi}] = E[\overline{A+iB}] = E[A - iB] = E[A] - iE[B] = \overline{E[A] + iE[B]} = \overline{E[A+iB]} = \overline{E[\xi]}.$$

Donc $\Phi_Y(-t) = \overline{\Phi_Y(t)}$, d'où la formule.

3. Existe-t-il des variables aléatoires réelles Y et Z, indépendantes et de même loi, telles que $Y - Z$ suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$? *Indication : penser au signe de* Φ

Si c'était le cas, on aurait, pour $t \neq 0$, par la question 1,

$$\Phi_{Y-Z}(t) = \frac{\sin t}{t},$$

et par la question 2,

$$\Phi_{Y-Z}(t) = |\Phi_Y(t)|^2.$$

Or ces équations sont incompatibles car la deuxième quantité est positive pour tout t, alors que la première est négative pour $t = \frac{3}{2}\pi$ par exemple. Donc la réponse est non : il n'existe pas de telles variables aléatoires.

Exercice 5 – ***Convergence de série aléatoire.*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $[0,1]$. Le but de l'exercice est de montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$;

(ii) presque sûrement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$.

Pour tout $n \geq 1$, on notera $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n \in [0,\infty]$.

1. On suppose (i). En déduire $E\Big[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big] < \infty$, puis (ii).

> Les variables X_n sont positives, donc le théorème de convergence monotone pour les séries donne $E[\sum_n X_n] = \sum_n E[X_n]$. Si (i) est vrai, alors ces deux quantités sont finies, donc $E[\sum_n X_n] < \infty$. Par suite, par le cours, presque sûrement, $\sum_n X_n < \infty$.

2. Dans la suite de cette question, on suppose (ii).
2.a) Justifier que $E[e^{-S}] > 0$.

> On a $S < \infty$ presque sûrement par hypothèse, donc $e^{-S} > 0$ presque sûrement. Par suite, $E[e^{-S}] > 0$. (Dans le cours, on a la contraposée : comme $e^{-S} \geq 0$, $E[e^{-S}] = 0$ impliquerait $e^{-S} = 0$ presque sûrement, d'où $S = \infty$ presque sûrement, ce qui n'est pas le cas vu (ii). Donc $E[e^{-S}] > 0$.)

2.b) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $E[e^{-S_n}] = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E[e^{-X_k}]$. En déduire (justifier) une expression de $E[e^{-S}]$, puis conclure que

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ln\big(E[e^{-X_n}]\big) < \infty.$$

> La première égalité vient du fait que $e^{-S_n} = e^{-X_1}e^{-X_2}\cdots e^{-X_n}$ et $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes.
> Ensuite, on note que $e^{-S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-S}$ et, pour tout $n \geq 1$, $e^{-S_n} \leq 1$, et 1 est intégrable ($E[1] = 1 < \infty$), donc par le théorème de convergence dominée
>
> $$E[e^{-S_n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[e^{-S}].$$
>
> (NB : la suite est décroissante, donc on pourrait aussi appliquer le théorème de convergence monotone pour la suite $1 - e^{-S_n}$, qui est croissante et positive)
> Or $E[e^{-S_n}] = \prod_{k=1}^{n} E[e^{-X_k}]$, donc ce produit converge quand $n \to \infty$ et on a
>
> $$E[e^{-S}] = \prod_{k=1}^{\infty} E[e^{-X_k}].$$
>
> En prenant le logarithme, on a
>
> $$\ln(E[e^{-S_n}]) = \sum_{k=1}^{n} \ln(E[e^{-X_k}])$$
>
> et, à la limite $n \to \infty$, (ln est continue)
>
> $$\ln(E[e^{-S}]) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(E[e^{-X_k}]).$$
>
> Comme $E[e^{-S}] > 0$ par la question 2.a), on a $\ln(E[e^{-S}]) > -\infty$ d'où l'inégalité annoncée.

2.c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - e^{-1}x.$$

Indication : partant de $e^{-x} = 1 - \int_0^x e^{-t}dt$, encadrer l'intégrale.

Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,x]$, on a $0 \leq t \leq 1$ donc, en utilisant la croissance de $t \mapsto -e^{-t}$,

$$1 = -e^0 \leq -e^{-t} \leq -e^{-1},$$

d'où

$$1 - x = 1 - \int_0^x e^0 dt \leq e^{-x} = 1 - \int_0^x e^{-t} dt \leq 1 - \int_0^x e^{-1} dt = 1 - e^{-1}x.$$

2.d) En déduire une majoration de $E[e^{-X_n}]$ en fonction de $E[X_n]$, puis

$$E[e^{-X_n}] \leq e^{-e^{-1}E[X_n]}$$

On a donc, par la seconde inégalité de 2.c), presque sûrement

$$e^{-X_n} \leq 1 - e^{-1}X_n$$

d'où, en intégrant,

$$E[e^{-X_n}] \leq E[1 - e^{-1}X_n] = 1 - e^{-1}E[X_n],$$

puis, par la première inégalité de 2.c) (avec $x = e^{-1}E[X_n]$),

$$E[e^{-X_n}] \leq e^{-e^{-1}E[X_n]}.$$

2.e) En déduire (i).

Par l'inégalité précédente, pour tout n,

$$\ln E[e^{-X_n}] \leq -e^{-1}E[X_n]$$

donc

$$e^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] \leq -\sum_{n=1}^{\infty} \ln E[e^{-X_n}]$$

et la conclusion de 2.b) montre alors que les quantités ci-dessus sont finies, et notamment

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty,$$

c'est-à-dire (i).