

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Fiche 5 – Modèles financiers à temps discret

Exercice 3. Dans un marché viable, on note c_n et p_n , respectivement, les valeurs à l'instant n d'un call et d'un put européens sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N . On souhaite montrer la formule de parité call-put suivante :

$$c_n - p_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

1. On suppose $K + (c_n - p_n - S_n)(1+r)^{N-n} > 0$. Montrer que vendre un call et acheter une action et un put au temps n constitue un arbitrage.
2. On suppose $K + (c_n - p_n - S_n)(1+r)^{N-n} < 0$. Montrer qu'acheter un call et vendre une action et un put au temps n constitue un arbitrage.
3. Conclure.

Retour sur ces questions vues en TD : si on préfère les calculs aux récits, on peut dire aussi que, dans le premier cas, la valeur du portefeuille au temps N est

$$\begin{aligned} V_N(\phi) &= (c_n - S_n - p_n)(1+r)^{N-n} - c_N + S_N + p_N \\ &= (c_n - S_n - p_n)(1+r)^{N-n} - (S_N - K)_+ + S_N + (K - S_N)_+ \\ &= (c_n - S_n - p_n)(1+r)^{N-n} + K > 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation (évidente) $x_+ - (-x)_+ = x$. Et similairement dans le second cas.

On peut faire plusieurs remarques/objections concernant ces exemples d'arbitrages :

- on s'est assuré que $V_N(\phi) > 0$ partant de $V_0(\phi) = 0$, mais pas que $V_m(\phi) \geq 0$ pour tout m entre 0 et N , c'est-à-dire que la stratégie est admissible. Et cela peut très bien ne pas être vérifié, donc il ne s'agit pas d'un arbitrage au sens le plus strict. Pour montrer la formule de parité call-put à l'aide de véritables arbitrages, on peut néanmoins adapter ce qui précède. Supposons qu'il soit possible que la formule soit fautive, c'est-à-dire qu'il existe des instants n où on peut avoir une inégalité au lieu d'une égalité ; alors on considère n^* le plus grand de ces instants possibles et la stratégie est : « si une inégalité a lieu au temps n^* , alors on suit les schémas précédents (questions 1 et 2), sinon on ne fait rien ». Cette stratégie a, comme avant, une valeur initiale nulle et une valeur finale positive et même parfois strictement positive, et de plus elle est bien admissible puisque la valeur au temps m est 0 si $m \leq n^*$ et, si $m > n^*$ et que la première inégalité (par exemple) est vérifiée en n^* , on a

$$V_m(\phi) = (c_{n^*} - S_{n^*} - p_{n^*})(1+r)^{m-n^*} - c_m + S_m + p_m > -K(1+r)^{-(N-m)} - c_m + S_m + p_m$$

de sorte que si $V_m(\phi) < 0$ alors on aurait à nouveau une inégalité dans la formule de parité call-put au temps m , contrairement à l'hypothèse de maximalité de n^* . Donc $V_m(\phi) \geq 0$.

- les opérations de vente et d'achat de put et de call s'inscrivent dans le cadre du cours si on considère que le marché est par exemple $((1+r)^n, S_n, c_n, p_n)$, c'est-à-dire que l'on inclut la cotation des calls et puts (appelé marché des produits dérivés). Le portefeuille de l'exercice est alors, à la question 1, $\phi_0 = \phi_1 = \dots = \phi_n = (0, 0, 0, 0)$ puis $\phi_{n+1} = \dots = \phi_N = (c_n - S_n - p_n, 1, -1, 1)$. Une remarque : si le marché (S^0, S^1) est viable et complet, alors (S^0, S^1, c, p) aussi puisque, sous \mathbb{P}^* , les cours actualisés des options sont des martingales (c'est la valeur d'une stratégie autofinancée simulant l'option).

Exercice 4. Montrer que, dans un marché viable, pour tout actif conditionnel h d'échéance N , toute stratégie autofinancée qui atteint h est admissible.

Rappel : un actif conditionnel d'échéance N est une variable aléatoire \mathcal{F}_N -mesurable positive. C'est le gain que permet une certaine option exerçable à la date N .

Supposons (pour simplifier les écritures) que l'on s'intéresse à un marché où l'on suit un seul actif financier $(S_n^1)_{n \geq 0}$, en plus de l'actif sans risque $(S_n^0)_{n \geq 0}$ où $S_n^0 = (1+r)^n$.

Soit ϕ une stratégie autofinancée qui atteint h au temps N : $V_N(\phi) = h$.

Considérons une probabilité risque-neutre \mathbb{P}^* , c'est-à-dire telle que le processus des cours actualisés $\tilde{S}_n^1 = (1+r)^{-n} S_n^1$ est une martingale (on sait qu'il en existe au moins une car le marché est supposé

viable). Alors, puisque la stratégie est autofinancée, la suite des valeurs actualisées $\tilde{V}_n(\phi) = (1+r)^{-n}V_n(\phi)$ est une martingale (voir le cours : c'est en fait la transformée de martingale $\langle \phi, \tilde{S} \rangle$). Par suite, pour tout $n \leq N$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^* \left[\tilde{V}_N(\phi) \middle| \mathcal{F}_n \right]$$

et donc, vu que $V_N(\phi) = h$,

$$V_n(\phi) = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [h | \mathcal{F}_n]$$

ce qui donne $V_n(\phi) \geq 0$ car $h \geq 0$. Ceci signifie que la stratégie ϕ est admissible, CQFD.

On pourrait retrouver ce résultat à l'aide de l'absence d'arbitrage (et donc sans passer par \mathbb{P}^*). S'il était possible d'avoir $V_n(\phi) < 0$ (pour un certain $n < N$) et $V_N(\phi) = h \geq 0$, alors en modifiant ϕ on pourrait en déduire une stratégie ψ telle que $V_n(\psi) = 0$ et $V_N(\psi) > h$, donc un arbitrage (je passe sur les détails).

Exercice 5. On suppose le marché viable et complet. On considère un actif $h = \varphi(S_0, S_1, \dots, S_N) \geq 0$, exerçable au temps N (une option asiatique, par exemple).

1. Donner l'expression générale du prix a_n de h au temps n en fonction de la probabilité à risque neutre.

De même que pour le put et le call,

$$a_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [\varphi(S_0, S_1, \dots, S_N) | \mathcal{F}_n].$$

2. Tenter d'écrire la formule explicite de a_n dans le cas du modèle de Cox–Ross–Rubinstein (ne pas chercher à la simplifier).

Dans le cas du modèle de Cox–Ross–Rubinstein, on connaît la probabilité \mathbb{P}^* , de sorte que l'on peut réécrire a_n explicitement : sous \mathbb{P}^* , $S_n = S_0 T_1 \cdots T_n$ avec T_1, \dots, T_N indépendantes et de loi

$$\mathbb{P}^*(T_n = 1+a) = p = 1 - \mathbb{P}^*(T_n = 1+b)$$

où p est tel que $r = pa + (1-p)b$. Alors

$$\begin{aligned} a_n &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [\varphi(S_0, S_0 T_1, \dots, S_0 T_1 \cdots T_N) | \mathcal{F}_n] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \sum_{t_{n+1}, \dots, t_N \in \{1+a, 1+b\}} p^{N_a(t)} (1-p)^{N_b(t)} \varphi(S_0, S_1, \dots, S_n, S_n t_{n+1}, S_n t_{n+1} t_{n+2}, \dots, S_n t_{n+1} \cdots t_N) \end{aligned}$$

où $N_a(t)$ est le nombre d'indices égaux à $1+a$ et de même pour b . Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait que les T_i sont indépendants et l'identité vue en cours qui en résulte : pour toute fonction positive ψ ,

$$\mathbb{E}[\psi(T_1, \dots, T_N) | T_1, \dots, T_n] = g(T_1, \dots, T_n)$$

où

$$g(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}[\psi(t_1, \dots, t_n, T_{n+1}, \dots, T_N)] = \sum_{t_{n+1}, \dots, t_N} \psi(t_1, \dots, t_n) \mathbb{P}(T_{n+1} = t_{n+1}, \dots, T_N = t_N),$$

c'est-à-dire que l'espérance conditionnelle sachant (T_1, \dots, T_n) (ou \mathcal{F}_n) s'obtient en considérant T_1, \dots, T_n comme fixés et en calculant l'espérance par rapport aux variables T_{n+1}, \dots, T_N .

La formule pour a_n paraît compliquée mais se prêterait sans problème au calcul par ordinateur.