Feuille d'exercices 9

Points critiques et extrema des fonctions de deux variables

1. Extremums des fonctions d'une variable

Exercice 9.1.— Soit la fonction d'une variable définie par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^6.$$

1. Trouver les points critiques de f.

2. Calculer les DLs à l'ordre 2 en chacun de ces points. (Question facultative : pouvez-vous calculer ces DLs sans utiliser la formule de Taylor ?)

3. On dit qu'un point critique x_0 est *dégénéré* si $f''(x_0) = 0$. Lesquels de ces points critiques sont dégénérés ?

4. Pour chacun des points critiques non dégénérés, dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local.

5. Le point critique dégénéré est-il un maximum local, ou un minimum local, ou ni l'un ni l'autre ?

6. Tracer le tableau de variation de f. Est-il cohérent avec vos réponses précédentes ? Les extremums locaux sont-ils des extremums absolus ?

Exercice 9.2.— (M) Mêmes questions pour la fonction définie par $f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{5}x^2\right)$.

---

2. Recherche de points critiques

Exercice 9.3.— Trouver les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f_1(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

2. $f_2(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

3. (plus difficile) $f_3(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$.

4. $f_4(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$.

5. (M) $g_1(x, y) = (1 + x)(1 + y)$; $g_2(x, y) = xy - y^2 + x^2 + 3x - y$; $g_3(x, y) = x^2(2 - y) + y^3 - 3y$; $g_4(x, y) = \left(1 + y^2\right)\exp\left(-x^2\right)$.

Exercice 9.4.— On considère la fonction définie par

$$f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Faire un dessin.

2. Trouver les points critiques de f.

3. (optionnelle) On considère une boîte en carton de volume 1 **sans couvercle**, dont la base a pour dimensions $x \times y$. **a.** Montrer que la surface des parois de la boite est donnée par $f(x, y)$. **b.** Montrer qu'il existe de telles boîtes (de volume 1 et sans couvercle) avec une surface aussi grande qu'on veut (les dessiner !). **c.** Pensez-vous alors que le point critique de f est un minimum ou un maximum (local ou absolu ?), ou ni l'un ni l'autre ?

---

3. Signe des formes quadratiques

Exercice 9.5.— Pour chacune des formes quadratiques suivantes, **a.** utiliser la méthode de Gauss pour obtenir une forme canonique, **b.** dire si la forme est dégénérée ou non, **c.** dans les cas non dégénérés dire si $(0,0)$ est un maximum, un minimum, ou un point selle.

1. $q_1(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$;

2. $q_2(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$;

3. $q_3(x,y) = -4x^2 - 12xy$;

4. $q_4(x,y) = 4xy$;

5. $q_5(x,y) = -2x^2 + xy$;

6. $q_6(x,y) = xy + y^2$.

7. (M) $p_1(x,y) = x^2 + xy + 10y^2$; $p_2(x,y) = x^2 + 10xy + y^2$; $p_3(x,y) = 10x^2 + xy + y^2$; $p_4(x,y) = xy + 10y^2$; $p_5(x,y) = 100xy$; $p_6(x,y) = 10x^2 + 100y^2$.

Exercice 9.6.—

1. Soit $q_1(x,y) = (x+2y)^2$. Il est clair que $q_1(x,y) \geq 0$ pour tout point (x,y). Quels sont les points (x,y) tels que $q_1(x,y) > 0$?

2. Même question pour la forme quadratique $q_2(x,y) = (x+y)^2 + y^2$.

---

4. Formule de Taylor à l'ordre 2

Exercice 9.7.— On considère la fonction f_1 de l'exercice 8.3. **1.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 en un point (x,y) quelconque. **2.** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,2)$. **3.** Même question au point $(0,0)$; que constate-t-on ? **4.** Même question en un point (x_0, y_0) quelconque.

Exercice 9.8.—

1. Soit la fonction de deux variables polynomiale suivante :

$$f_1(x,y) = 7 + 5x^2 - 3y^2 + 10x^2y + 15x^3 + 1000x^3y.$$

a. Ecrire les DLs de f au point $(0,0)$ à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

b. Le point $(0,0)$ est-il un point critique ? Si oui, est-il dégénéré ? Est-ce un minimum ou un maximum local, ou un point selle ?

2. Mêmes questions avec

$$f_2(x,y) = x + x^2 + y^2.$$

3. (plus difficile) Mêmes questions avec

$$f_3(x,y) = 1 + x^2 + x^3 + y^3.$$

4. (M) Mêmes questions avec $g_1(x,y) = (1-x)(-2+y)$; $g_2(x,y) = 2 - 3x^2 - 4y^2 + 100x^2y^3$; (difficile) $g_3(x,y) = -1 + (x-y)^2 + x^3$.

Exercice 9.9.— Pour chacune des fonctions de l'exercice 8.3, donner la nature (dégénéré, maximum local, minimum local ou point selle) de chacun des points critiques.

Exercice 9.10.— La surface $S(x, y)$ d'un container en carton de volume $1m^3$ dont la base a pour dimension x, y est la fonction

$$S(x, y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

(cf. exercice 7.3) On considère le container de volume $1m^3$ dont la base a les dimensions $x = 1m$ et $y = 1m$ (c'est donc un cube). On veut estimer la variation de surface lorsque le côté x augmente de $5cm$, et le côté y diminue de $10cm$.

1. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 au point $(1, 1)$. Peut-on en déduire une estimation de la variation ?

2. Répondre au problème en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, et en supposant que le reste est négligeable devant les autres termes.

3. Calculer la variation à la calculatrice, et comparer avec votre estimation.

Exercice 9.11.— On considère la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$. On voudrait savoir si $(0, 0)$ est un extremum local.

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique.

2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0, 0)$: quelle est la nature du point critique $(0, 0)$? Que peut-on en déduire pour notre problème ?

3. Étudier le signe de $f(x, y)$ en fonction de x et y : faire un dessin dans le plan (Oxy) en indiquant les régions où $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$. Répondre à la question initiale : le point $(0, 0)$ est-il un maximum ou un minimum local ?

Exercices supplémentaires

Exercice 9.12.— Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante : *Parmi tous les triangles de périmètre fixé, quels sont ceux qui ont une aire maximale ?*

1. Première partie On cherche d'abord le maximum, pour x et y compris entre 0 et 1, de la fonction $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

a. Dessiner l'ensemble des points (x,y) tels que $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Déterminer et représenter le signe de f sur cet ensemble.

b. Trouver le(s) point(s) critique(s) de f dans cet ensemble.

On voudrait maintenant vérifier que le point critique trouvé correspond bien au maximum de la fonction f.

c. Pour y fixé (entre 0 et 1), trouver la valeur maximale de $f(x,y)$ lorsque x varie entre 0 et 1. On note cette valeur $m(y)$.

d. Trouver la valeur maximale de $m(y)$ pour y variant entre 0 et 1. Conclure.

2. Seconde partie On donne la *formule de Héron*[1] : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est donnée par

$$A = \sqrt{p(p-A)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

a. Dessiner quelques triangles de périmètre 2 (par exemple avec 1 unité = $10cm.$). Avez-vous une idée de la réponse à la question : comment obtenir un triangle avec la plus grande aire possible ?

b. Pour simplifier, on consière les triangles de périmètre 2 (c-à-d $p = 1$). Exprimer l'aire comme une fonction F des deux longueurs a et b.

c. Dessiner le domaine de définition de la fonction F. Déterminer la partie du domaine de définition qui correspond aux valeurs positives de a, b et c.

d. À l'aide de la première partie, trouver les longueurs de a et b correspondant aux triangles d'aire maximale.

Exercice 9.13.— Le but de cet exercice est de comprendre comment obtenir des DLs de fonctions de deux variables à partir de DLs de fonctions d'une variable.

1. Montrer que pour tout (x,y), on a $-\|(x,y)\| \leq x \leq \|(x,y)\|$. En déduire

a. que la quantité $\frac{x}{\|(x,y)\|}$ est bornée ;

b. que la quantité $\frac{xy}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$;

c. que la quantité $\frac{x^2}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

2. Soit la fonction $f(x,y) = e^{x-y}$. On veut écrire le DL de f en $(0,0)$ à l'ordre 1 en utilisant la formule de Taylor de la fonction exponentielle :

$$e^u = 1 + u + u\varepsilon(u),$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

a. On pose

$$\varepsilon_1(x,y) = \frac{x-y}{\|(x,y)\|}\varepsilon(x-y).$$

Montrer que $\varepsilon_1(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

b. En déduire le développement limité de f en $(0,0)$ à l'ordre 1 (en remplaçant u par $x-y$ dans la formule de Taylor de exponentielle).

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer le DL des fonctions suivantes à partir des DLs classiques des fonctions d'une variable.

$f_1(x,y) = (1+x)\sqrt{1+y}$ en $(0,0)$ à l'ordre 1 ; $f_2(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$ en $(0,0)$ à l'ordre 1 ; $f_3(x,y) = \sin(x-y)$ en $(0,0)$ à l'ordre 2 ; $f_4(x,y) = e^{x^2-y^2}$ en $(0,0)$ à l'ordre 2.

[1] Héron d'Alexandrie, premier siècle après J.-C.