Intégrations successives

Exercice 1 - - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit D le domaine : $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$. Calculer $\iint_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants :

$$\text{a) } f(x,y)=x^2+y^2 \quad b)\ f(x,y)=xy(x+y).$$

Exercice 2 - - *L2/Math Spé* - ⋆

Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D f(x,y)dxdy$, avec

1. $f(x,y)=x$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ x-y+1\geq 0,\ x+2y-4\leq 0\right\}$.
2. $f(x,y)=x+y$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1;\ x^2\leq y\leq x\right\}$.
3. $f(x,y)=\cos(xy)$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x\leq 2,\ 0\leq xy\leq \frac{\pi}{2}\right\}$.
4. $f(x,y)=xy$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ xy+x+y\leq 1.\right\}$.
5. $f(x,y)=\frac{1}{(x+y)^3}$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<3,\ y>2, x+y<5\right\}$.

Exercice 3 - - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit D le domaine :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\leq x\leq 1 \text{ et } x^2\leq y\leq 4-x^3\right\}.$$

Calculer l'aire de D.

Exercice 4 - - *Deuxième année* - ⋆⋆

On pose :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x^2+y^2\geq 1\right\}.$$

Calculer $\displaystyle\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

Exercice 5 - Dans l'espace - *L2/Math Spé* - ⋆

On se propose de calculer

$$I=\iiint_D xdxdydz,$$

où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1\}$. On note T_z l'intersection de D et d'un plan P_z de cote z.

1. Déterminer pour quelles valeurs de z l'ensemble T_z est non-vide.
2. Pour une valeur de z fixée telle que T_z est non-vide, calculer

$$I=\int_{(x,y)\in T_z} xdxdy.$$

3. En déduire la valeur de I.

4. Etudier l'intersection $D_{x,y}$ de D et d'une droite d'équation $X=x$, $Y=y$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Retrouver la valeur de I.

Exercice 6 - Toujours l'espace ! - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$ pour :

1. $f(x,y,z)=\cos x$ et $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<1\right\}$.
2. $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\leq a^2 \text{ et } 0<z<a\right\}$.

CHANGEMENTS DE VARIABLES

Exercice 7 - Coordonnées polaires - *Deuxième année* - ⋆

Calculer l'intégrale double

$$\int\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

où $\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0<x^2+y^2\leq 1\right\}$.

Exercice 8 - Coordonnées polaires toujours - *Deuxième année* - ⋆

Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x\leq 0\right\}$.

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Exercice 9 - Et encore... - *Deuxième année* - ⋆

Calculer $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants :

1. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ et $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
2. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2y\}$ et $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 10 - Changement de variables à suivre - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer les intégrales doubles $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants, en suivant le changement de variables indiqué :

1. $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^{2/3}+y^{2/3}\leq 1\right\}$ et $f(x,y)=xy$. On posera $x=r\cos^3\theta$ et $y=r\sin^3\theta$.
2. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<x<y,\ a<xy<b,\ y^2-x^2<1\}$ et $f(x,y)=(y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)$. On posera $u=xy$ et $v=y^2-x^2$.

Exercice 11 - Coordonnées elliptiques - *Deuxième année* - ⋆⋆

Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$. Calculer l'intégrale :

$$J=\int\int_D (2x^3-y)dxdy.$$

Exercice 12 - Changement de variables dans l'espace - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit B la boule unité, et $a > 1$. Calculer :

$$\int\int\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$$

GREEN-RIEMANN

Voir la feuille sur les intégrales curvilignes.

APPLICATIONS

Exercice 13 - Volume d'un ellipsoïde - *Deuxième année* - ⋆⋆

Déterminer le volume intérieur à l'ellipsoide d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

où a, b et c désignent trois réels strictement positifs.

Exercice 14 - Volume déterminé par une surface de l'espace - *Deuxième année* - ⋆⋆

Soit a un nombre tel que $0 < a < 1$, et S l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(u\cos t, u\sin t, \sin t)$ pour $t \in [0,\pi]$, et $a \leq u \leq 1$.

1. Trouver une équation de S de la forme $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.
2. Calculer le volume limité par S et le plan (xOy).

Exercice 15 - Un centre de gravité dans le plan - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine :

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ x\geq 0 \text{ et } y\geq 0\right\}.$$

Exercice 16 - Calcul d'une intégrale simple - *Math Spé* - ⋆⋆

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a :

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}.$$

   En déduire que $I = \displaystyle\int\int_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$, où D est le pavé $[0,1]^2$.

2. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que

$$2I = \int\int_D \frac{(x+y)dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

   En déduire que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice 17 - Centre de gravité d'une demi-boule - *Deuxième année* - ⋆⋆⋆

Déterminer le centre de gravité d'une demi-boule homogène.

Exercice 18 - Aire comprise entre deux hyperboles - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Calculer l'aire du compact D du quart de plan $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ délimité par les droites d'équation $y=ax$ et $y=\frac{1}{a}x$, et par les hyperboles d'équation $y=\frac{b}{x}$ et $y=\frac{1}{bx}$.

Exercice 19 - Calcul d'une intégrale impropre - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On se propose dans cet exercice de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Soit $a>0$. On note K_a le carré de centre O de côté $2a$ et C_a le disque de centre O et de rayon a. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}.$$
Justifier que
$$\int_{C_a}f(x,y)dxdy\leq\int_{K_a}f(x,y)dxdy\leq\int_{C_{a\sqrt{2}}}f(x,y)dxdy.$$
3. En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer
$$\int_{C_a}f(x,y)dxdy.$$
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.