

Questions à préparer sur le chapitre 3

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^- \rightarrow Y$ définie par $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$ est une bijection de \mathbb{R}^- sur un ensemble Y à déterminer. Ecrire sa bijection réciproque.

2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - e^{-x}$ est une bijection. Vérifier que $(f'(x))^2 = 4 + (f(x))^2$ puis calculer la dérivée de f^{-1} .

3. Ecrire le tableau de variations de $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ qui à x associe $\left(\frac{1}{x}\right)^x$.

4. Combien de solutions l'équation

$$\operatorname{Arccos}(x) - \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{3}{2}$$

a-t-elle pour x dans $[0, 1]$?

5. Montrer que pour tout x dans $] -1; 1[$,

$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in [0; 1[$,

$$\operatorname{Arcsin} x \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7. On considère l'expression

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

Déterminer l'ensemble de définition D de l'expression $f(x)$.

Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \in D$, (on pourra calculer la dérivée de l'application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ associée à l'expression $f(x)$).